

ANÁLISE NÃO LINEAR VIA TEORIA DOS PONTOS CRÍTICOS

José Pastana de Oliveira Neto



Todo o conteúdo apresentado neste livro é de
responsabilidade do(s) autor(es).
Esta obra está licenciada com uma Licença
Creative Commons Atribuição-SemDerivações
4.0 Internacional.

Conselho Editorial

Prof. Dr. Ednilson Sergio Ramalho de Souza - UFOPA
(Editor-Chefe)
Prof. Dr. Laecio Nobre de Macedo-UFMA
Prof. Dr. Aldrin Vianna de Santana-UNIFAP
Prof.^a. Dr.^a. Raquel Silvano Almeida-Unespar
Prof. Dr. Carlos Erick Brito de Sousa-UFMA
Prof.^a. Dr.^a. Ilka Kassandra Pereira Belfort-Faculdade Laboro
Prof.^a. Dr. Renata Cristina Lopes Andrade-FURG
Prof. Dr. Elias Rocha Gonçalves-IFF
Prof. Dr. Clézio dos Santos-UFRRJ
Prof. Dr. Rodrigo Luiz Fabri-UFJF
Prof. Dr. Manoel dos Santos Costa-IEMA
Prof.^a Dr.^a. Isabella Macário Ferro Cavalcanti-UFPE
Prof. Dr. Rodolfo Maduro Almeida-UFOPA
Prof. Dr. Deivid Alex dos Santos-UEL
Prof.^a Dr.^a. Maria de Fatima Vilhena da Silva-UFPA
Prof.^a Dr.^a. Dayse Marinho Martins-IEMA
Prof. Dr. Daniel Tarciso Martins Pereira-UFAM
Prof.^a Dr.^a. Elane da Silva Barbosa-UERN
Prof. Dr. Piter Anderson Severino de Jesus-Université Aix Marseille

Nossa missão é a difusão do conhecimento gerado no âmbito acadêmico por meio da organização e da publicação de livros científicos de fácil acesso, de baixo custo financeiro e de alta qualidade!

Nossa inspiração é acreditar que a ampla divulgação do conhecimento científico pode mudar para melhor o mundo em que vivemos!

Equipe RFB Editora

José Pastana de Oliveira Neto

Análise não linear via teoria dos Pontos Críticos

1ª Edição

Belém-PA
RFB Editora
2023

© 2023 Edição brasileira
by RFB Editora
© 2023 Texto
by Autor
Todos os direitos reservados

RFB Editora
CNPJ: 39.242.488/0001-07
www.rfbeditora.com
adm@rfbeditora.com
91 98885-7730
Av. Governador José Malcher, nº 153, Sala 12, Nazaré, Belém-PA,
CEP 66035065

Editor-Chefe
Prof. Dr. Ednilson Souza
Diagramação, revisão de texto e
capa
Autor

Produtor editorial
Nazareno Da Luz

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)



A532

Análise não linear via teoria dos Pontos Críticos / José Pastana de Oliveira Neto
-Belém: rfb, 2023.

16 x 23 cm
Livro em pdf.

ISBN 978-65-5889-604-3
DOI 10.46898/rfb.5248224b-c7f8-4a86-a9b0-e734cb6b44c0

1. Matemática. I. Oliveira Neto, José Pastana de II. Título.

CDD 510

Índice para catálogo sistemático

I. Matemática.

Sumário

Prefácio	i
1 Introdução	1
2 Existência de Solução fraca para um problema de Dirichlet não linear com condição de crescimento	3
2.1 Alguns resultados básicos	3
2.2 Método Variacional a um problema de Dirichlet não linear	10
3 Os Teoremas de Deformação e o Teorema do Passo da montanha	21
3.1 Os Teoremas de Deformação	21
3.2 O Teorema do Passo da Montanha	29
4 Uma aplicação do Teorema do Passo da Montanha	33
4.1 Existência de solução fraca para o problema de Dirichlet não linear com a condição de Ambrosetti-Rabinowitz.	33
5 Teorema do Passo da Montanha Generalizado	45
5.1 Alguns resultados do Grau topológico	45
5.2 Teorema do Passo da Montanha Generalizado	45
5.3 Exercícios Propostos	48
Referências Bibliográficas	50

Capítulo 1

Introdução

Neste livro estudaremos a existência de solução fraca para o seguinte problema,

$$-\Delta u = f(x, u) \text{ em } \Omega, \quad u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \quad (1.1)$$

conhecido como problema de Dirichlet não linear, onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, ($N \geq 2$) é um domínio limitado com fronteira suave e, $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de **Carathéodory** satisfazendo algumas condições, em que uma das principais é:

- (H3) Existem $\mu > 2$ e $r > 0$ tais que

$$0 < \mu F(x, t) \leq t f(x, t) \quad \forall x \in \overline{\Omega}, \quad |t| \geq r, \text{ onde } F(x, t) = \int_0^t f(x, z) dz,$$

conhecida como a condição de **Ambrosetti e Rabinowitz**, onde o método utilizado para resolver o mesmo, será, o método variacional e usar o **Teorema do Passo da Montanha** para encontrar um ponto crítico do funcional,

$$\psi(u) = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} |\nabla u|^2 - F(x, u) \right) dx, \quad (1.2)$$

definido no Espaço de Sobolev $H_0^1(\Omega)$, que é o funcional associado ao problema.

No primeiro capítulo do desenvolvimento do livro, estudaremos o método variacional e provaremos dois lemas de fundamental importância para o desenvolvimento do livro, no capítulo seguinte enunciaremos e demonstraremos dois **Teoremas de Deformação**, que serão usados para a demonstração do Teorema do Passo da Montanha.

Agora sim, no capítulo seguinte, faremos uma aplicação do Teorema do Passo da Montanha, que será resolver o problema acima. Terminando o livro com uma generalização do Teorema principal, que é o Passo da Montanha, e propondo alguns exercícios clássicos juntamente com um desafio para o leitor.

Capítulo 2

Existência de Solução fraca para um problema de Dirichlet não linear com condição de crescimento

2.1 Alguns resultados básicos

Apresentaremos nesta seção uma sequencia de resultados e definições de forma bem simplificada e direta, para apenas fazer uso futuramente dos mesmos.

Definição 1. Uma função f de X em $\mathbb{R}$ é dita X -mensurável, (ou simplesmente mensurável), se para qualquer numero real α , tem-se

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\}.$$

Definição 2. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$) um domínio limitado e seja $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função, dizemos que f é uma função de **Carathéodory**, quando f satisfaz as seguintes condições:

- 1) $f(\cdot, s)$ é mensurável em Ω para todo $s \in \mathbb{R}$ fixado,
- 2) $f(x, \cdot)$ é contínua em $\mathbb{R}$ para quase todo $x \in \Omega$.

Defini-se, o operador de Nemytskii N_f , por f , i.e., $(N_f u) = f(x, u(x))$, para toda função mensurável $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. É possível mostrar, que o operador está bem definido no espaço das funções mensuráveis em Ω .

Definição 3. Sejam E e F espaços de Banach e U um aberto em E . Dizemos que uma aplicação $\psi : U \rightarrow F$ é Fréchet-diferenciável no ponto $x_0 \in U$ se existe um operador linear contínuo $A : E \rightarrow F$

tal que

$$\psi(x_0 + h) = \psi(x_0) + A(h) + r(x_0, h),$$

para todo h , tal que $x_0 + h$ pertence a uma bola aberta centrada em x_0 , e contida em U , onde $r(x_0, h) = o(\|h\|)$, isto é:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|r(x_0, h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Neste caso A é chamada de derivada de Fréchet de ψ em x_0 , a derivada de Fréchet no ponto x_0 , quando existe, é única, denotamos por $\psi'(x_0)$.

Definição 4. Se B é um aberto de um espaço de Banach X , dizemos que ψ é de classe C^1 em B , ou que $\psi \in C^1(B, \mathbb{R})$ quando a derivada de Fréchet de ψ existe em todo $x \in B$ e a aplicação $\psi' : B \rightarrow X'$ é contínua. Onde X' denotará o dual de X .

Definição 5. Dado um espaço de Banach X e um funcional $\psi : X \rightarrow \mathbb{R}$, dizemos que ψ possui derivada de Gateaux no ponto $u \in X$ quando existem um funcional linear $T_0 \in X'$ tal que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\psi(u + tv) - \psi(u) - T_0 v}{t} = 0, \text{ para todo } v \in X.$$

As duas definições seguintes tanto o espaço de Lebesgue $L^p(\Omega)$ como do espaço de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$, estão de uma forma bem simplificada, pois nosso objetivo não será tratar dos mesmos diretamente, mas apenas usá-los. Logo ressalto que o leitor que apresente dificuldades em trabalhar com os espaços citados, pode revisar tais teorias lendo [4].

Definição 6.

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : u \text{ é mensurável, } \int_{\Omega} |u|^p < +\infty \right\}.$$

Definição 7.

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_j} \in L^p(\Omega), j = 1, \dots, N \right\}.$$

Onde $\frac{\partial u}{\partial x_j}$ denota a j -ésima derivada fraca de u , ou seja,

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx = - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_j} \varphi dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Quando $p = 2$ e $m = 1$ escrevemos $W_0^{m,p}(\Omega) = H_0^1(\Omega)$. Todo o livro foi desenvolvido sobre $H_0^1(\Omega)$.

Teorema 1. (Desigualdade de Poincaré) Seja Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^N$. Então, existe uma constante $C = C(\Omega, p)$ tal que

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx \right)^{1/p}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega), \quad 1 \leq p \leq +\infty.$$

Teorema 2. *Sejam Ω um subconjunto limitado do $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 2$), Ω de classe C^m e $1 \leq p \leq +\infty$. Então as imersões são contínuas:*

i) $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $1 \leq q \leq \frac{Np}{N-mp} = p^*$ se $mp < N$.

ii) $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $1 \leq q \leq +\infty$ se $mp = N$.

Como consequência das imersões, existe $C > 0$ tal que

$$\|u\|_{L^q} \leq C \|u\|_{W^{m,p}}.$$

Para todo $u \in W^{m,p}(\Omega)$.

Teorema 3. (Desigualdade de Schwarz): *Seja $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ um espaço vetorial com produto interno. Então:*

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Teorema 4. (Teorema Fundamental do Cálculo): *Sejam G um espaço vetorial normado completo e $f : [a, b] \longrightarrow G$ contínua, são equivalentes:*

i) *Se F é uma integral indefinida de f , então*

$$F(x) - F(a) = \int_a^x f(t)dt, \quad \forall x \in [a, b]$$

ii) *Se F é uma primitiva de f , então*

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b].$$

Teorema 5. (Teorema de Fubini): *Suponhamos que $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$. Então, para todo $x \in \Omega_1$,*

$$F(x, y) \in L^1_y(\Omega_2) \text{ e } \left(\int_{\Omega_2} F(x, y) dy \right) \in L^1_x(\Omega_1).$$

De maneira análoga, para $y \in \Omega_2$,

$$F(x, y) \in L^1_x(\Omega_1) \text{ e } \left(\int_{\Omega_1} F(x, y) dx \right) \in L^1_y(\Omega_2).$$

Além disso,

$$\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} F(x, y) dy = \int_{\Omega_2} dy \int_{\Omega_1} F(x, y) dx = \int \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} F(x, y) dx dy.$$

Teorema 6. (Desigualdade de Holder): *Seja $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$, com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ e $p \geq 1$. Então,*

$$f \cdot g \in L^1(\Omega)$$

e

$$\int_{\Omega} |f \cdot g| dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Teorema 7. *Seja (f_n) uma sequência em $L^p(\Omega)$ e $f \in L^p(\Omega)$, tal que $\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} \rightarrow 0$. Então, existe uma subsequência (f_{n_k}) tal que*

$$i) f_{n_k}(x) \rightarrow f(x) \text{ q.t.p em } \Omega;$$

$$ii) |f_{n_k}(x)| \leq h(x) \text{ q.t.p em } \Omega.$$

Teorema 8. (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue): *Seja f_n uma sequência de funções integráveis. Suponha que*

$$i) f_n \rightarrow f(x) \text{ q.t.p em } \Omega$$

$$ii) |f_n(x)| \leq g(x) \text{ q.t.p } \Omega, \text{ para alguma função } g \in L^1(\Omega). \text{ Então,}$$

$$f \in L^1(\Omega) \text{ e } \|f_n - f\|_{L^1(\Omega)} \rightarrow 0.$$

Teorema 9. *Suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^N (N \geq 1)$ é um conjunto limitado e $1 \leq p \leq q$. Se $u \in L^q(\Omega)$, então $u \in L^p(\Omega)$, e além disso, a imersão*

$$L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$$

é contínua.

Teorema 10. (Imersão de Sobolev): *Sejam Ω um domínio suave em $\mathbb{R}^N$, $m \geq 0$ e $1 \leq q \leq +\infty$. Então, para qualquer $j \geq 0$ as imersões são contínuas:*

$$i) \text{ Se } m < \frac{N}{p}, W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,p}(\Omega), p \leq q \leq \frac{Np}{N-mp} = p^*;$$

$$ii) \text{ Se } m = \frac{N}{p}, W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,p}(\Omega), p \leq q \leq +\infty.$$

Teorema 11. (Teorema da Representação de Riesz-Fréchet): *Seja H um espaço de Hilbert, então dado $\varphi \in H'$, existe uma única $f \in H$, tal que*

$$\langle \varphi, v \rangle = (f, v) \quad \forall v \in H.$$

E mais ainda, verifica-se que

$$\|f\|_H = \|\varphi\|_{H'}.$$

Teorema 12. (Imersão Compacta de Rellich-Kondrachov): *Sejam Ω um domínio limitado com fronteira suave em $\mathbb{R}^N$, $j \geq 0$, $m \geq 1$ e $1 \leq p \leq +\infty$. Então as imersões abaixo são compactas:*

$$i) \text{ Se } m < \frac{N}{p}, W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,p}(\Omega), 1 \leq q < \frac{Np}{N-mp} = p^*;$$

$$ii) \text{ Se } m = \frac{N}{p}, W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,p}(\Omega), 1 \leq q < +\infty.$$

Teorema 13. (Critério de Compacidade): *Sejam X e Y espaços vetoriais normados. Um operador linear $T : X \longrightarrow Y$ é compacto se, e somente se, toda sequência limitada $(x_n) \subset X$ tem a propriedade que a sequência $(T(x_n)) \subset Y$ possui uma subsequência convergente.*

Teorema 14. *Sejam X e Y espaços vetoriais normados e $T : X \longrightarrow Y$ um operador linear compacto. Se $(x_n) \subset X$ verifica*

$$x_n \rightharpoonup x \text{ em } X,$$

então,

$$T(x_n) \longrightarrow T(x) \text{ em } Y.$$

Lema 1. *Seja $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de Carathéodory, e (u_n) , uma sequência de elementos de M , e N_f operador de Nemytskii definido por f . Então,*

$$N_f u_n \longrightarrow N_f u \text{ em } q.t.p$$

se

$$u_n \longrightarrow u \text{ em } q.t.p.$$

Onde M , é o conjunto das funções $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ mensuráveis.

Definição 8. *Um campo pseudo-gradiente para $\psi \in C^1(X, \mathbb{R})$ é uma aplicação localmente lipshitziana, $V : Y \rightarrow X$, onde,*

$$Y = \{u \in X \mid \psi'(u) \neq 0\}, \quad (2.1)$$

satisfazendo as seguintes condições:

$$1) \quad \|V(u)\| \leq 2 \|\psi'(u)\|$$

$$2) \quad \psi'(u).V(u) \geq \|\psi'(u)\|^2$$

(Veja a definição de $\psi'(u)$, em 3)

Lema 2. *Sob as hipóteses da definição acima, existe um campo pseudo-gradiente V para ψ em Y .*

Demonstração. Dado $u \in Y$, temos $\psi'(u) \neq 0$ e

$$\|\psi'(u)\| = \sup \{ \langle \psi'(u), w \rangle : \|w\| = 1 \}.$$

Segue da definição de supremo que, dado

$$\epsilon = \frac{\|\psi'(u)\|}{3} > 0,$$

existe $w_u \in X$ com $\|w_u\| = 1$ e

$$\langle \psi'(u), w_u \rangle > \|\psi'(u)\| - \epsilon.$$

Então

$$\langle \psi'(u), w_u \rangle > \frac{2}{3} \|\psi'(u)\|.$$

Consideremos a função $v : Y \longrightarrow X$ dada por

$$v(u) = \frac{3}{2} \|\psi'(u)\| w_u$$

e denotando $v = v(u)$, temos

$$\|v\| = \frac{3}{2} \|\psi'(u)\| < 2 \|\psi'(u)\|. \quad (2.2)$$

Por outro lado, vem

$$\langle \psi'(u), v \rangle = \frac{3}{2} \|\psi'(u)\| \langle \psi'(u), w_u \rangle,$$

daí

$$\langle \psi'(u), v \rangle > \frac{3}{2} \|\psi'(u)\| \frac{2}{3} \|\psi'(u)\|,$$

logo,

$$\langle \psi'(u), v \rangle > \|\psi'(u)\|^2.$$

Como ψ' é contínua, existe uma vizinhança aberta N_u de v em Y tal que

$$\|v\| < 2 \|\psi'(w)\|, \quad \forall w \in N_u \quad (2.3)$$

e

$$\langle \psi'(w), v \rangle > \|\psi'(w)\|^2 \quad \forall w \in N_u. \quad (2.4)$$

Desde que a família $\{N_u, u \in Y\}$ é uma cobertura aberta de Y , como Y é métrico, logo, é paracompacto, (ver [5]), podemos refinar a cobertura N_u por uma cobertura aberta localmente finita, em outras palavras, existe um refinamento localmente finito N_{u_i} de Y . No que segue, considerando

$$\rho_i(u) = \text{dist}(u, (N_{u_i})^c), \quad \forall u \in Y,$$

e

$$V(u) = \sum_i \frac{\rho_i(u)}{\sum_j \rho_j(u)} v_i \quad \forall u \in Y \quad (2.5)$$

onde

$$v_i = \frac{3}{2} \|\psi'(u_i)\| w_{u_i}.$$

Sendo N_{u_i} localmente finita, daí, cada $u \in Y$, só pertence apenas a um número finito de N_{u_i} . Logo as somas definidas em (2.5) são finitas, pois ρ_i se anula fora de N_{u_i} . Assim $V(u)$ é uma combinação convexa dos vetores v'_i , que verificam

$$\|v_i\| < 2 \|\psi'(u)\|, \quad \forall u \in N_{u_i},$$

e

$$\langle \psi'(u), v_i \rangle > \|\psi'(u)\|^2, \quad \forall u \in N_{u_i}.$$

Logo, dado $u \in Y$, vem

$$V(u) = \sum_{i=1}^n \frac{\rho_i(u)}{\sum_{j=1}^n \rho_j(u)} v_i = \frac{\rho_1(u)}{\sum_{j=1}^n \rho_j(u)} v_1 + \dots + \frac{\rho_n(u)}{\sum_{j=1}^n \rho_j(u)} v_n$$

implicando

$$\|V(u)\| \leq \frac{\rho_1(u)}{\sum_{j=1}^n \rho_j(u)} \|v_1\| + \dots + \frac{\rho_n(u)}{\sum_{j=1}^n \rho_j(u)} \|v_n\|.$$

Portanto

$$\|V(u)\| \leq \sum_{i=1}^n \frac{\rho_i(u)}{\sum_{j=1}^n \rho_j(u)} \|v_i\| = \frac{1}{\sum_{j=1}^n \rho_j(u)} \cdot \sum_{i=1}^n \rho_i(u) \|v_i\|.$$

Sendo as somas acima finitas para cada u , segue que

$$\|V(u)\| \leq 2 \|\psi'(u)\|$$

e

$$\langle \psi'(u), V(u) \rangle \geq \|\psi'(u)\|^2.$$

Vamos mostrar agora que, V é localmente Lipschitziana, para isso, basta mostrarmos que a parcela

$$\frac{\rho_i(u)}{\sum_{j=1}^n \rho_j(u)} \cdot \|v_i\|$$

é localmente Lipschitziana. Note que para cada i , $\|v_i\|$ é constante, vamos mostrar que no caso de duas parcelas a função

$$g(u) = \frac{\rho_1(u)}{\rho_1(u) + \rho_2(u)}$$

é localmente Lipschitziana. Para tanto, Considerando z arbitrário tal que $u, v \in U_z$, temos

$$g(u) - g(v) = \frac{\rho_1(u)}{\rho_1(u) + \rho_2(u)} - \frac{\rho_1(v)}{\rho_1(v) + \rho_2(v)},$$

de onde segue

$$g(u) - g(v) = \frac{\rho_1(u)\rho_1(v) + \rho_1(u)\rho_2(v) - \rho_1(u)\rho_1(v) - \rho_1(v)\rho_2(u)}{\alpha}$$

onde

$$\alpha = [\rho_1(u) + \rho_2(u)] \cdot [\rho_1(v) + \rho_2(v)].$$

Então

$$g(u) - g(v) = \frac{\rho_1(u)\rho_2(v) - \rho_1(v)\rho_2(u)}{\alpha}.$$

Assim, somando e subtraindo $\rho_1(v)\rho_2(v)$ no numerador da fração acima, obtemos

$$g(u) - g(v) = \frac{\rho_2(v) [\rho_1(u) - \rho_1(v)]}{\alpha} + \frac{\rho_1(v) [\rho_2(v) - \rho_2(u)]}{\alpha}$$

e ainda

$$|g(u) - g(v)| \leq \frac{\rho_2(v)}{\alpha} |\rho_1(u) - \rho_1(v)| + \frac{\rho_1(v)}{\alpha} |\rho_2(v) - \rho_2(u)|.$$

Ora, sendo ρ_1, ρ_2 funções Lipschitzianas, temos que existem, $K_1, K_2 > 0$ tais que

$$|\rho_1(u) - \rho_1(v)| \leq K_1 \|u - v\| \quad e \quad |\rho_2(v) - \rho_2(u)| \leq K_2 \|u - v\|.$$

Portanto

$$|g(u) - g(v)| \leq \frac{\rho_2(v)}{\alpha} K_1 \|u - v\| + \frac{\rho_1(v)}{\alpha} K_2 \|u - v\|.$$

Desde que $\rho_1(u) + \rho_2(u) > 0$, existe $a > 0$ tal que $\rho_1(u) + \rho_2(u) > a > 0$, como ρ_1, ρ_2 , são funções contínuas, logo existe uma vizinhança U_z de u tal que

$$\rho_1(v) + \rho_2(v) > a \quad \forall v \in U_z.$$

Com isso

$$|g(u) - g(v)| \leq \frac{1}{a} K_1 \|u - v\| + \frac{1}{a} K_2 \|u - v\|,$$

pois,

$$\frac{\rho_1(v)}{\rho_1(v) + \rho_2(v)} \leq 1, \quad \frac{\rho_2(v)}{\rho_1(v) + \rho_2(v)} \leq 1.$$

Logo

$$|g(u) - g(v)| \leq \frac{1}{a} (K_1 + K_2) \|u - v\|, \quad \forall u, v \in V_z.$$

Mostrando assim que g é localmente lipschitziana. Concluindo assim que V é um campo vetorial pseudo-gradiente para ψ em Y . □

2.2 Método Variacional a um problema de Dirichlet não linear

Seja o seguinte problema de Dirichlet não linear

$$-\Delta u = f(x, u) \text{ em } \Omega, \quad u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \quad (2.6)$$

Onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, ($N \geq 2$) é um domínio limitado com fronteira suave e, $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de Carathéodory satisfazendo a seguinte condição de crescimento:

- (H1) $\exists c, d \geq 0$ e $0 \leq \sigma < \frac{(N+2)}{(N-2)}$ se $N \geq 3$ [$0 \leq \sigma < \infty$ se $N = 1, 2$]

tais que

$$|f(x, t)| \leq c |t|^\sigma + d.$$

Estamos interessados em encontrar soluções fracas do problema acima, isto é, funções $u \in H_0^1(\Omega)$, tais que

$$\int_{\Omega} [\nabla u \cdot \nabla v - f(x, u)v] dx = 0 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (2.7)$$

Para isso, lembrando que o método variacional consiste em associar ao problema acima um funcional, de tal modo que pontos críticos do funcional sejam soluções fracas do problema. O candidato natural a funcional associado ao problema (4.1), é dado por $\psi : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, tal que

$$\psi(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 - \int_{\Omega} F(x, u).$$

Assim, esta solução fraca será ponto crítico do funcional $\psi : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ se, e somente se, este funcional satisfizer

$$\psi'(u).v = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v - \int_{\Omega} f(x, u)v \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

O lema abaixo, confirmará que, de fato, este é o funcional associado ao problema (4.1).

Lema 3. *Suponha que $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz as condições de Carathéodory e a condição de crescimento (H₁). Então o funcional*

$$\psi(u) = \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} |\nabla u|^2 - F(x, u) \right] dx, \quad u \in H_0^1(\Omega),$$

está bem definido e, de fato, $\psi \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ com

$$\psi'(u).v = \int_{\Omega} [\nabla u \cdot \nabla v - f(x, u)v] dx \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega). \quad (2.8)$$

Onde

$$F(x, t) = \int_0^t f(x, z) dz.$$

Portanto, $u \in H_0^1(\Omega)$ é uma solução fraca do problema (4.1) se, e somente se, u é um ponto crítico de ψ .

Demonstração. Vamos sempre considerar o espaço $H_0^1(\Omega)$ munido da norma

$$\|u\| = \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

a qual é equivalente a norma usual do espaço $H_0^1(\Omega)$,

$$\|u\| = \left(\int_{\Omega} (u^2 + |\nabla u|^2) dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

onde verifica-se pela desigualdade de Poincaré (ver Teorema 1).

Vamos primeiramente mostrar que sob a condição (H1), temos que ψ está bem definido. Para isso, vamos escrever,

$$\psi_1(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \text{ e } \psi_2(u) = \int_{\Omega} F(x, u) dx.$$

Note que,

$$\psi_1(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx = \frac{1}{2} \|u\|^2 < +\infty,$$

pois, $u \in H_0^1(\Omega)$. Agora para concluirmos que ψ está bem definido, basta mostrarmos que ψ_2 também é finito. Vamos começar mostrando a seguinte desigualdade

$$|F(x, t)| \leq d|t| + c \frac{|t|^{\sigma+1}}{\sigma+1}, \text{ onde } 0 \leq \sigma < \frac{N+2}{N-2} \text{ e } N > 2. \quad (2.9)$$

Para isso vamos analisar dois casos: Caso (a) $t \geq 0$, por (H1) temos

$$|F(x, t)| \leq \int_0^t |f(x, z)| dz \leq d \int_0^t dz + c \int_0^t |z|^{\sigma} dz = dt + \frac{ct^{\sigma+1}}{\sigma+1} = d|t| + \frac{c|t|^{\sigma+1}}{\sigma+1}$$

Caso (b) $t < 0$, segue

$$|F(x, t)| = \left| \int_0^t f(x, z) dz \right| = \left| - \int_t^0 f(x, z) dz \right| \leq \int_t^0 |f(x, z)| dz,$$

logo,

$$|F(x, t)| \leq d \int_t^0 dz + c \int_t^0 |z|^{\sigma} dz$$

ou seja,

$$|F(x, t)| \leq d(-t) - c \frac{|t|^{\sigma+1}}{\sigma+1},$$

concluimos,

$$|F(x, t)| \leq d|t| + c \frac{|t|^{\sigma+1}}{\sigma+1}.$$

Consequentemente (2.9), vale. Como $u \in H_0^1(\Omega)$, temos

$$|\psi_2| \leq \int_{\Omega} |F(x, t)| dx \leq c_3 \int_{\Omega} |u| dx + c_4 \int_{\Omega} |u|^{\sigma+1} dx < +\infty$$

por causa da imersão contínua $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\sigma+1}(\Omega)$, (Ver a desigualdade do Teorema 2, tem i), onde $\sigma+1 \in [1, 2^*]$. Portanto ψ está bem definido.

Vamos provar agora que $\psi \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ com

$$\psi'(u)v = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx - \int_{\Omega} f(x, u) v dx, \quad u, v \in H_0^1(\Omega).$$

Dividiremos esta prova em dois casos:

1º caso: $N > 2$.

Seja,

$$\psi_1 = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx := \frac{1}{2} \langle u, u \rangle.$$

Vamos mostrar que ψ é Fréchet Diferenciável com derivada contínua. Para isso, (ver as definições 3, 4 e 5). Inicialmente vamos calcular a derivada de Gateux de ψ_1 . Temos

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial v}(u) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\psi_1(u + hv) - \psi_1(u)}{h}.$$

Logo,

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial v}(u) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \langle u + hv, u + hv \rangle - \frac{1}{2} \langle u, u \rangle}{h}$$

daí obtemos

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial v}(u) = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\langle u, v \rangle + \frac{1}{2} h \langle v, v \rangle \right] = \langle u, v \rangle.$$

Esta derivada de Gateux, é a candidata natural a derivada de Fréchet. Dai, nosso objetivo é mostrar que,

$$\lim_{\|v\| \rightarrow 0} \frac{r(v)}{\|v\|} = 0$$

onde, $r_1(v) = \psi_1(u + v) - \psi_1(u) - \langle u, v \rangle$, para podermos concluir que, de fato, esta derivada de Gateux é a de Fréchet. A partir daí, temos

$$\lim_{\|v\| \rightarrow 0} \frac{\psi_1(u + v) - \psi_1(u) - \langle u, v \rangle}{\|v\|} = \lim_{\|v\| \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \langle u + v, u + v \rangle - \frac{1}{2} \langle u, u \rangle - \langle u, v \rangle}{\|v\|}$$

o que nos dá,

$$\lim_{\|v\| \rightarrow 0} \frac{\psi_1(u + v) - \psi_1(u) - \langle u, v \rangle}{\|v\|} = \lim_{\|v\| \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \|v\|^2}{\|v\|} = \lim_{\|v\| \rightarrow 0} \frac{1}{2} \|v\| = 0.$$

Isto mostra de ψ_1 é Fréchet Diferenciável em $H_0^1(\Omega)$, com

$$\psi_1'(u).v = \langle u, v \rangle$$

e consequentemente ψ_1 é contínua. Vamos mostrar agora a continuidade de ψ_1' , para podermos concluir que $\psi_1 \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$. Consideremos $\{u_n\} \subset H_0^1(\Omega)$, com $u_n \rightarrow u$ em $H_0^1(\Omega)$ quando $n \rightarrow \infty$. Mostraremos que

$$\psi_1'(u_n) \longrightarrow \psi_1'(u) \text{ em } (H_0^1(\Omega))'$$

ou equivalentemente

$$\|\psi_1'(u_n) - \psi_1'(u)\|_{(H_0^1(\Omega))'} \longrightarrow 0.$$

Por definição segue

$$\|\psi'_1(u_n) - \psi'_1(u)\|_{(H_0^1(\Omega))'} = \sup_{\|v\| \leq 1} |(\psi'_1(u_n) - \psi'_1(u)) \cdot v|.$$

Note que

$$|(\psi'_1(u_n) - \psi'_1(u)) \cdot v| = |\psi'_1(u_n) \cdot v - \psi'_1(u) \cdot v| = |\langle u_n, v \rangle - \langle u, v \rangle| = |\langle u_n - u, v \rangle|.$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz (Ver Teorema 3), temos

$$|(\psi'_1(u_n) - \psi'_1(u)) \cdot v| \leq \|u_n - u\| \cdot \|v\| \leq \|u_n - u\|,$$

pois $\|v\| \leq 1$. E agora pela definição de supremo, obtemos

$$\sup_{\|v\| \leq 1} |(\psi'_1(u_n) - \psi'_1(u)) \cdot v| \leq \|u_n - u\|.$$

Portanto

$$\|\psi'_1(u_n) - \psi'_1(u)\|_{(H_0^1(\Omega))'} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Logo, ψ'_1 é contínua. De onde concluímos que $\psi_1 \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$.

Vamos prosseguir de maneira análoga para

$$\psi_2(u) = \int_{\Omega} F(x, u) dx, \text{ onde } F(x, t) = \int_0^t f(x, z) dz.$$

Mostraremos então que ψ_2 é Fréchet Diferenciável com derivada contínua, para assim concluímos que, de fato, ψ é de classe C^1 . Seja $u \in H_0^1(\Omega)$ fixado e para cada $v \in H_0^1(\Omega)$, consideremos

$$r_1(v) = \psi_2(u + v) - \psi_2(u) - \int_{\Omega} f(x, u) v dx. \quad (2.10)$$

Precisamos mostrar que

$$\lim_{\|v\| \rightarrow 0} \frac{r_1(v)}{\|v\|} = 0,$$

ou seja, $\forall \epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\|v\| < \delta \Rightarrow |r_1(v)| \leq \epsilon \cdot \|v\| \quad (2.11)$$

de (2.10) vem

$$r_1(v) = \int_{\Omega} (F(x, u + v) - F(x, u)) dx - \int_{\Omega} f(x, u) v dx.$$

Segue do Teorema fundamental do Calculo (Ver Teorma 4), que

$$F(x, u + v) - F(x, u) = \int_0^1 \frac{d}{dz} F(x, u + zv) dz. \quad (2.12)$$

Note que

$$\frac{d}{dz} F(x, u + zv) = \frac{d}{dz} \int_0^1 f(x, u + zv) \cdot v,$$

ou seja,

$$\frac{d}{dz}F(x, u + zv) = f(x, u + zv) \cdot v,$$

passando a integral com limites de integração de 0 a 1, na igualdade acima, obtemos

$$\int_0^1 \frac{d}{dz}F(x, u + zv)dz = \int_0^1 f(x, u + zv) \cdot v dz.$$

Portanto, de (2.12) e da definição de $r_1(v)$, vem

$$r_1(v) = \int_{\Omega} \left[\int_0^1 f(x, u + zv) v dz \right] dx - \int_{\Omega} f(x, u) v dx$$

daí

$$r_1(v) = \int_{\Omega} \left[\int_0^1 (f(x, u + zv) - f(x, u)) \cdot v dz \right] dx$$

então

$$|r_1(v)| \leq \int_{\Omega} \left[\int_0^1 |(f(x, u + zv) - f(x, u)) v| dz \right] dx. \quad (2.13)$$

Seja, $q = 2^* = \frac{2N}{N-2}$ e $r = \frac{2N}{N+2}$, onde $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$. Como $v \in H_0^1(\Omega)$, então pela imersão contínua de Sobolev $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, (Ver Teorema 2, item i), temos $v \in L^q(\Omega)$.

Vamos agora mostrar que $f(\cdot, u(\cdot)) \in L^r(\Omega)$. veja, desde que f satisfaz a condição de crescimento (H_1) , temos

$$\int_{\Omega} |f(x, u)|^r dx \leq \int_{\Omega} [d + c |u|^{\sigma}]^r dx \leq k \int_{\Omega} [|d|^r + |c|^r \cdot |u|^{\sigma r}] dx,$$

onde $k > 0$. Dai,

$$\int_{\Omega} |f(x, u)|^r dx \leq M |\Omega| + c \int_{\Omega} |u|^{\sigma r} dx. \quad (2.14)$$

Agora basta mostrarmos que a ultima integral é finita. Notemos que a condição de crescimento (H_1) , é valida também para $1 \leq \sigma < \frac{N+2}{N-2}$, com $N > 2$. Agora,

$$1 \leq \sigma < \frac{N+2}{N-2} \implies 1 < r \leq \sigma \cdot r < 2^*, \text{ com } N > 2.$$

Seja $u \in H_0^1(\Omega)$. Usando a imersão contínua de Sobolev $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\sigma \cdot r}(\Omega)$, (Ver Teorema 2, item i), obtemos que $u \in L^{\sigma \cdot r}(\Omega)$, o que implica

$$\int_{\Omega} |u|^{\sigma \cdot r} dx < +\infty.$$

logo de (2.14) temos,

$$\int_{\Omega} |f(x, u)|^r dx < +\infty.$$

mostrando assim que, $f(\cdot, u(\cdot)) \in L^r(\Omega)$. Em (2.13) aplicando o Teorema de Fubini (Ver Teorema 5), obtemos,

$$|r_1(v)| \leq \int_0^1 \left[\int_{\Omega} |(f(x, u + zv) - f(x, u)) v| dx \right] dz.$$

Agora, usando Holder, (Ver Teorema 6) segue

$$|r_1(v)| \leq \int_0^1 \|f(\cdot, u + zv) - f(\cdot, u)\|_{L^r(\Omega)} \cdot \|v\|_{L^q(\Omega)} dz \quad (2.15)$$

Afirmção 1: Vale a convergência

$$f(\cdot, u + zv) \longrightarrow f(\cdot, u) \text{ em } L^{\frac{q}{\sigma}}(\Omega)$$

uniformemente para $z \in [0, 1], \forall x \in \Omega$ quando $v \longrightarrow 0$ em $H_0^1(\Omega)$. Note que esta afirmação é equivalente a

$$f(\cdot, u + zv_n) \longrightarrow f(\cdot, u) \text{ em } L^{\frac{q}{\sigma}}(\Omega)$$

uniformemente para $z \in [0, 1], \forall x \in \Omega$ com $v_n \longrightarrow 0$ em $H_0^1(\Omega)$ quando $n \longrightarrow +\infty$.

Demonstração da afirmação 1: Consideremos $(v_n) \subset H_0^1(\Omega)$, com $v_n \longrightarrow 0$ em $H_0^1(\Omega)$. Segue da imersão contínua de Sobolev $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{q}{\sigma}}(\Omega)$, (Ver Teorema 2, item i), que existe $K > 0$;

$$\|v_n\|_{L^{\frac{q}{\sigma}}(\Omega)} \leq K \|v_n\|_{H_0^1(\Omega)}$$

daí, se $v_n \longrightarrow 0$ em $H_0^1(\Omega)$, então

$$v_n \longrightarrow 0 \text{ em } L^{\frac{q}{\sigma}}(\Omega). \quad (2.16)$$

Logo, (Ver Teorema 7), existe uma subsequência de (v_n) , que ainda denotaremos por, (v_n) e $g \in L^{\frac{q}{\sigma}}(\Omega)$ tal que

$$|v_n(x)| \leq g(x) \text{ q.t.p } x \in \Omega,$$

e

$$v_n \longrightarrow 0 \text{ q.t.p } x \in \Omega.$$

Daí,

$$|(u + zv_n)(x)| \leq (|u| + g)(x) \text{ q.t.p } x \in \Omega, \forall z \in [0, 1] \quad (2.17)$$

e

$$(u + zv_n)(x) \longrightarrow u(x) \text{ q.t.p } x \in \Omega. \quad (2.18)$$

Agora, usando o fato de f ser uma função de Caracothéodory, juntamente com o (lema 1), e (2.18), temos

$$f(x, (u + zv_n)(x)) \longrightarrow f(x, u(x)) \text{ q.t.p } x \in \Omega,$$

ou seja,

$$|f(x, (u + zv_n)(x)) - f(x, u(x))|^{\frac{q}{\sigma}} \longrightarrow 0 \text{ q.t.p } x \in \Omega.$$

Além disso, usando a condição de crescimento (H_1) , e a limitação uniforme em (2.17) e o fato de Ω ser limitado, resulta que existe uma função $J \in L^1(\Omega)$ tal que

$$|f(x, (u + zv_n)(x)) - f(x, u(x))|^{\frac{q}{\sigma}} \leq J,$$

de onde segue usando o Teorema da convergência Dominada de Lebesgue (Ver Teorema 8), que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{\Omega} |f(x, (u + zv_n)(x)) - f(x, u(x))|^{\frac{q}{\sigma}} dx \right) = 0.$$

Observação: mostramos que dado (v_n) , com $v_n \rightarrow 0$ em $H_0^1(\Omega)$ quando $n \rightarrow +\infty$, existe uma $(u_{n_k}) \subset (u_n)$ satisfazendo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{\Omega} |f(x, (u + zv_{n_k})(x)) - f(x, u(x))|^{\frac{q}{\sigma}} dx \right) = 0. \quad (2.19)$$

Vamos supor que não ocorra a convergência uniforme. Então, existem $\epsilon_0 > 0$ e $z_{n_k} \in [0, 1]$ tal que

$$\|f(\cdot, (u + z_{n_k} v_{n_k})(\cdot)) - f(\cdot, u(\cdot))\|_{L^{\frac{q}{\sigma}}(\Omega)} \geq \epsilon_0, \quad \forall n_k \in \mathbb{N}. \quad (2.20)$$

Vamos prosseguir com os mesmos argumentos desde de (2.16) até (2.19). Considerando uma $(v_n) \subset H_0^1(\Omega)$, com $v_n \rightarrow 0$, em particular, $v_{n_k} \rightarrow 0$ temos novamente da imersão contínua de Sobolev $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{q}{\sigma}}(\Omega)$ (Ver Teorema 2 item i), que

$$v_{n_k} \rightarrow 0 \text{ em } L^{\frac{q}{\sigma}}(\Omega). \quad (2.21)$$

logo, (Ver Teorema 7), temos que existem, uma $(v_{n_{k'}}) \subset (v_{n_k})$ e $g \in L^{\frac{q}{\sigma}}(\Omega)$ tal que

$$|v_{n_{k'}}(x)| \leq g(x) \text{ q.t.p } x \in \Omega,$$

e

$$v_{n_{k'}} \rightarrow 0 \text{ q.t.p } x \in \Omega.$$

Dai

$$|(u + z_{n_{k'}} v_{n_{k'}})(x)| \leq (|u| + g(x))(x) \text{ q.t.p } x \in \Omega, \quad z_{n_{k'}} \in [0, 1]. \quad (2.22)$$

e

$$(u + z_{n_{k'}} v_{n_{k'}})(x) \rightarrow u(x) \text{ q.t.p } x \in \Omega. \quad (2.23)$$

Novamente, usando o fato de f ser uma função de Caracothéodory, juntamente com o (lema 1.) e (2.23), temos

$$f(x, (u + z_{n_{k'}} v_{n_{k'}})(x)) \rightarrow f(x, u(x)) \text{ q.t.p } x \in \Omega.$$

Ou seja,

$$|f(x, (u + z_{n_{k'}} v_{n_{k'}})(x)) - f(x, u(x))|^{\frac{q}{\sigma}} \rightarrow 0 \text{ q.t.p } x \in \Omega.$$

Agora usando a condição de Crescimento (H_1), a limitação uniforme em (2.22) e o fato de Ω ser limitado, resulta que existe uma função $J_1 \in L^1(\Omega)$ tal que

$$\left| f(x, (u + z_{n_{k'}} v_{n_{k'}})(x)) - f(x, u(x)) \right|^{\frac{q}{\sigma}} \leq J_1,$$

e pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, (Ver Teorema 8,) temos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_{\Omega} \left| f(x, (u + z_{n_{k'}} v_{n_{k'}})(x)) - f(x, u(x)) \right|^{\frac{q}{\sigma}} dx \right) = 0,$$

ou seja,

$$\left\| f(\cdot, (u + z_{n_{k'}} v_{n_{k'}})(\cdot)) - f(\cdot, u(\cdot)) \right\|_{L^{\frac{q}{\sigma}}(\Omega)} < \epsilon \quad \forall n_{k'} \geq n_0$$

o que contradiz (2.20). Assim concluímos a demonstração da **afirmação 1**.

A **afirmação 1** significa que, dado $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que

$$\|v\| < \delta \Rightarrow \|f(\cdot, u + zv) - f(\cdot, u)\|_{L^{\frac{q}{\sigma}}(\Omega)} < \epsilon,$$

uniformemente em $z \in [0, 1]$. Como $1 < r < \frac{q}{\sigma}$ e Ω é limitado, (Ver Teorema 9, Apêndice), Vale a seguinte imersão contínua

$$L^{\frac{q}{\sigma}}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega).$$

Daí, usando a desigualdade da imersão, vem

$$\|v\| < \delta \Rightarrow \|f(\cdot, u + zv) - f(\cdot, u)\|_{L^r(\Omega)} < C\epsilon, \quad (2.24)$$

uniformemente em $z \in [0, 1]$. Substituindo (2.24) em (2.15), temos

$$|r(v)| \leq C\epsilon \cdot \|v\|_{L^q(\Omega)}.$$

Assim, pela imersão contínua $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, pois $q = 2^*$, (Ver Teorema 2, item i Apêndice), resulta em

$$|r(v)| \leq C_1 \epsilon \|v\|, \quad \text{sempre que } \|v\| < \delta,$$

mostrando (2.11). Concluído assim que o funcional ψ_2 , é Fréchet Diferenciável, com

$$\psi_2'(u) \cdot v = \int_{\Omega} f(x, u) v dx, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Agora vamos mostrar que ψ_2' é contínuo. Considere $(v_n) \subset H_0^1(\Omega)$, com $v_n \rightarrow 0$ em $H_0^1(\Omega)$. Como no item anterior, usando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, (Ver Teorema 8), vem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{\Omega} |f(x, (u + z v_n)(x)) - f(x, u(x))|^{\frac{q}{\sigma}} dx \right) = 0.$$

Sendo $1 < r < \frac{q}{\sigma}$ e Ω é limitado, (Ver Teorema 9), temos a imersão contínua

$$L^{\frac{q}{\sigma}}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega).$$

Daí, existe $K > 0$;

$$\|f(x, (u + zv_n)(x)) - f(x, u(x))\|_{L^r(\Omega)} \leq K \cdot \|f(x, (u + zv_n)(x)) - f(x, u(x))\|_{L^{\frac{q}{\sigma}}(\Omega)}$$

então

$$\|f(x, (u + zv_n)(x)) - f(x, u(x))\|_{L^r(\Omega)} \longrightarrow 0 \text{ quando } v_n \longrightarrow 0 \text{ em } H_0^1(\Omega)$$

por outro lado, sabemos que

$$\|\psi'_2(u + v_n) - \psi'_2(u)\|_{(H_0^1(\Omega))'} = \sup_{\|v\| \leq 1} |(\psi'_2(u + v_n) - \psi'_2(u)) \cdot v|. \quad (2.25)$$

Note agora que

$$|(\psi'_2(u + v_n) - \psi'_2(u)) \cdot v| = \left| \int_{\Omega} [f(x, (u + zv_n)(x)) - f(x, u(x))] v dx \right|$$

daí

$$|(\psi'_2(u + v_n) - \psi'_2(u)) \cdot v| \leq \int_{\Omega} |[f(x, (u + zv_n)(x)) - f(x, u(x))] v| dx.$$

Usando Hölder, (Ver Teorema 6), segue

$$\int_{\Omega} |[f(x, (u + zv_n)(x)) - f(x, u(x))] v| dx \leq \|f(x, (u + zv_n)(x)) - f(x, u(x))\|_r \cdot \|v\|_q.$$

e agora usando a imersão contínua de Sobolev, $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, (Ver Teorema 2, item i), vem que existe um $K > 0$ tal que

$$\|f(x, (u + zv_n)(x)) - f(x, u(x))\|_r \cdot \|v\|_q \leq K \|f(x, (u + zv_n)(x)) - f(x, u(x))\|_r \cdot \|v\|.$$

Como

$$\|f(x, (u + zv_n)(x)) - f(x, u(x))\|_{L^r(\Omega)} \longrightarrow 0 \text{ quando } v_n \longrightarrow 0 \text{ em } H_0^1(\Omega)$$

resulta que, também

$$\|f(x, (u + zv_n)(x)) - f(x, u(x))\|_r \cdot \|v\|_q \longrightarrow 0.$$

Então

$$|(\psi'_2(u + v_n) - \psi'_2(u)) \cdot v| \longrightarrow 0,$$

e combinando com (2.25), temos

$$\|\psi'_2(u + v_n) - \psi'_2(u)\|_{(H_0^1(\Omega))'} \longrightarrow 0.$$

Isto mostra que ψ'_2 , é contínuo para $N > 2$. Logo $\psi_2 \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$. **2º Caso:** $N = 2$.

Neste caso basta prosseguir de maneira análoga ao primeiro caso, fazendo apenas algumas modificações que listaremos: Primeiramente, substituamos a imersão contínua

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \text{ onde } q = 2^*$$

(Ver Teorema 2, item i), pela imersão

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \text{ com } 1 \leq q < \infty$$

(Ver Teorema 2, item ii). Em seguida, usando a imersão acima, mostra-se que

$$f(\cdot, u) \in L^{\frac{r}{r-1}}(\Omega),$$

onde $\frac{r}{r-1}$ é o conjugado de r , e

$$f(x, u + zv) \longrightarrow f(x, u) \text{ em } L^{\frac{r}{r-1}}(\Omega)$$

uniformemente em $s \in [0, 1]$. Unindo os dois casos, mostra-se que $\psi \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$, com

$$\psi'(u).v = \int_{\Omega} [\nabla u. \nabla v - f(x, u)v] dx \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega).$$

□

Capítulo 3

Os Teoremas de Deformação e o Teorema do Passo da montanha

3.1 Os Teoremas de Deformação

Definição 9. *Seja $\psi : X \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional de classe C^1 num espaço de Banach X . Dizemos que $c \in \mathbb{R}$ é um valor crítico de ψ se $\psi(u) = c$ para algum ponto crítico $u \in X$. O conjunto de todos os pontos críticos no nível c será designado por K_c , isto é,*

$$K_c = \{u \in X \mid \psi'(u) = 0, \psi(u) = c\}. \quad (3.1)$$

Também, designamos por ψ^c o conjunto de todos os pontos u , em níveis menores ou iguais a c , isto é,

$$\psi^c = \{u \in X \mid \psi(u) \leq c\}. \quad (3.2)$$

Um ingrediente fundamental para os métodos topológicos que consideraremos é o chamado Teorema de Deformação. A grosso modo, ele nos diz quando e como podemos deformar um funcional no nível ψ^{c_1} em ψ^{c_2} nível, para $c_1 > c_2$ ou $c_1 < c_2$.

Teorema 15. (Teorema de Deformação): *Seja $\psi : X \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional de classe C^1 no Espaço de Banach X . Suponha que $S \subset X$, $c \in \mathbb{R}$ e $\epsilon, \delta > 0$ são tais que*

$$\|\psi'(u)\| \geq \frac{4\epsilon}{\delta} \quad (3.3)$$

para todo $u \in \psi^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon]) \cap S_{2\delta}$. Então existe $\eta \in C([0, 1] \times X, X)$ tal que, para todo $u \in X$ e $t \in [0, 1]$, tem-se:

i) $\eta(0, u) = u$,

ii) $\eta(t, u) = u$ se $u \notin \psi^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon]) \cap S_{2\delta}$,

iii) $\eta(1, \psi^{c+\epsilon} \cap S) \subset \psi^{c-\epsilon} \cap S_\delta$.

Onde, dados um subconjunto $S \subset X$ e $\delta > 0$, S_δ designa a vizinhança fechada de S , definida por:

$$S_\delta = \{u \in X : \text{dist}(u, s) \leq \delta\}.$$

Demonstração. Consideremos os seguintes subconjuntos de X :

$$A = \psi^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon]) \cap S_{2\delta}$$

e

$$B = \psi^{-1}([c - \epsilon, c + \epsilon]) \cap S_\delta.$$

Pelo lema 2, existe um campo pseudo-gradiente V para ψ em Y , onde

$$Y = \{u \in X : \psi'(u) \neq 0\}.$$

Pela definição do conjunto A , temos que, $A \subset Y$. De fato, por (3.3), temos,

$$\|\psi'(u)\| \geq \frac{4\epsilon}{\delta} > 0, \quad \forall u \in A.$$

logo, $\psi'(u) \neq 0$, mostrando que $A \subset Y$. Considerando a aplicação $\rho : X \rightarrow \mathbb{R}$ localmente lipschitziana definida por

$$\rho(u) = \frac{\text{dist}(u, \overline{A^c})}{\text{dist}(u, \overline{A^c}) + \text{dist}(u, B)} \quad (3.4)$$

e notemos que ρ está bem definida. Veja, supondo por absurdo que

$$\text{dist}(u, X - A) + \text{dist}(u, B) = 0.$$

Então existem, $z_n \in (X - A)$ e $v_n \in B$, tais que

$$z_n \rightarrow u, \quad v_n \rightarrow u.$$

Segue da definição de A , que

$$\psi(z_n) > c + 2\epsilon \quad \text{ou} \quad \psi(z_n) < c - 2\epsilon,$$

então

$$\psi(u) \geq c + 2\epsilon \quad \text{ou} \quad \psi(u) \leq c - 2\epsilon.$$

Por outro lado, temos pela definição de B , que

$$c - \epsilon \leq \psi(v_n) \leq c + \epsilon,$$

passando o limite, vem

$$c - \epsilon \leq \psi(u) \leq c + \epsilon.$$

Que é um absurdo. Portando ρ está bem definida. Temos

$$\rho(u) = 1 \text{ em } B, \rho(u) = 0 \text{ em } \overline{A^c} \quad (3.5)$$

e notemos ainda pela definição de ρ que,

$$0 \leq \rho(u) \leq 1 \text{ em } X. \quad (3.6)$$

Se $f : X \rightarrow X$ é uma aplicação definida por,

$$f(u) = \frac{-\rho(u)}{\|V(u)\|} \cdot V(u) \text{ se } u \in A \quad (3.7)$$

e

$$f(u) = 0 \text{ se } u \in A^c \quad (3.8)$$

temos que f é localmente lipschitziana, (Ver Lema 4). Como $\|f(u)\| \leq 1$ para cada $u \in X$, com isso, o problema de Cauchy, que denotamos por (PC),

$$\frac{dw_1}{dt}(t) = f(w_1(t)), \quad w_1(0) = u \quad (3.9)$$

possui uma única solução, (Ver [1]), a qual denotaremos por $w(t, u)$, sendo definida para todo $t \geq 0$. No que segue, considerando a aplicação

$$\eta : [0, 1] \times X \rightarrow X,$$

definida por

$$\eta(t, u) = w(\delta t, u). \quad (3.10)$$

Assim

$$\eta(0, u) = w(0, u) = u \quad (3.11)$$

isto é

$$\eta(0, u) = u \text{ quando } t = 0 \quad (3.12)$$

mostrando (i). Seja $u \in A^c$ e defina $w_1(t) = u$. Note que pela definição de f segue,

$$f(w_1(t)) = 0 \Rightarrow w'_1(t) = 0, \text{ pois } f(w_1(t)) = w'_1(t)$$

ou ainda, se $u \in A^c$, tem-se $f(u) = 0$. Daí,

$$\frac{dw_1}{dt}(t) = f(w_1(t)), \quad w_1(0) = u \quad (3.13)$$

logo, pela unicidade da solução do (PC), devemos ter,

$$w_1(t) = w(t, u) = u, \quad \text{para quaisquer } u \in A^c, \quad t \in [0, 1],$$

e por consequência,

$$\eta(t, u) = u, \quad \forall u \in A^c, \quad \forall t \in [0, 1].$$

O que mostra (ii). Agora, observe que para $t \geq 0$,

$$w(t, u) - w(0, u) = \int_0^t \frac{d}{d\tau}(w(\tau, u))d\tau$$

assim,

$$\|w(t, u) - w(0, u)\| = \left\| \int_0^t \frac{d}{d\tau}(w(\tau, u))d\tau \right\|$$

e ainda,

$$\|w(t, u) - w(0, u)\| \leq \int_0^t \|f(w(\tau, u))\| d\tau$$

o que implica pela definição de f ,

$$\begin{aligned} \|w(t, u) - u\| &\leq \int_0^t \frac{\|\rho(w(\tau, u))\|}{\|V(w(\tau, u))\|} \|V(w(\tau, u))\| d\tau \\ \|w(t, u) - u\| &\leq \int_0^t 1 d\tau = t \end{aligned} \quad (3.14)$$

o que mostra que se $u \in S$, então

$$w(t, u) \subset S_\delta \quad \forall t \in [0, \delta]$$

isto é,

$$w(t, S) = \eta(t, S) \subset S_\delta \quad \forall t \in [0, 1]. \quad (3.15)$$

Note também que para cada $u \in X$ fixado, a função $t \mapsto \psi(w(t, u))$ é não-crescente, pois,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\psi(w(t, u)) &= \psi'(w(t, u)).w'(t, u) \\ \frac{d}{dt}\psi(w(t, u)) &= \psi'(w(t, u)).f(w(t, u)) \\ \frac{d}{dt}\psi(w(t, u)) &= \psi'(w(t, u)).\frac{-\rho(w(t, u))V(w(t, u))}{\|V(w(t, u))\|} \end{aligned}$$

e pela definição de campo pseudo-gradiente temos,

$$\frac{d}{dt}\psi(w(t, u)) \leq \frac{-\rho(w(t, u)).\|\psi'(w(t, u))\|^2}{\|V(w(t, u))\|} \leq 0. \quad (3.16)$$

Seja agora, $u \in (\psi^{c+\epsilon} \cap S)$ temos os dois casos.

Caso (a): Se $\psi(w(\hat{t}, u)) < c - \epsilon$ Para algum $\hat{t} \in [0, \delta]$ tem-se

$$\psi(\eta(1, u)) = \psi(w(\delta, u)) \leq \psi(w(\hat{t}, u)) < c - \epsilon$$

pois, $\psi(w(\cdot, u))$ é decrescente, donde segue,

$$w(\delta, u) \in \psi^{c-\epsilon}.$$

por outro lado de (3.14)

$$\|w(\delta, u) - u\| \leq \delta,$$

assim,

$$w(\delta, u) \in S_\delta$$

implicando que

$$w(\delta, u) \in (\psi^{c-\epsilon} \cap S_\delta)$$

segue da definição de η , que

$$\eta(1, u) \in (\psi^{c-\epsilon} \cap S_\delta)$$

e portanto

$$\eta(1, \psi^{c+\epsilon} \cap S) \subset (\psi^{c-\epsilon} \cap S_\delta)$$

Caso (b): Note que $\forall t \in [0, \delta]$, temos

$$\psi(w(t, u)) \leq \psi(w(0, u)) = \psi(u) \leq c + \epsilon$$

o que implica

$$\psi(w(t, u)) \leq c + \epsilon.$$

Supondo que

$$w(t, u) \in B = \psi^{-1}([c - \epsilon, c + \epsilon]) \cap S_\delta \quad \forall t \in [0, \delta],$$

uma vez que

$$\psi(w(\delta, u)) - \psi(u) = \int_0^\delta \frac{d}{dt} \psi(w(t, u)) dt,$$

ou seja

$$\psi(w(\delta, u)) = \psi(u) + \int_0^\delta \frac{d}{dt} \psi(w(t, u)) dt,$$

segue da definição (8) e (3.16) que

$$\psi(w(\delta, u)) \leq \psi(u) - \frac{1}{2} \int_0^\delta \|\psi'(w(t, u))\| dt. \quad (3.17)$$

De fato, lembrando que

$$\|V(w(t, u))\|_X \leq 2 \|\psi'(w(t, u))\|_{X'},$$

daí

$$-\frac{\|\psi'(w(t, u))\|_{X'}^2}{2 \|\psi'(w(t, u))\|_{X'}} \geq -\frac{\|\psi'(w(t, u))\|_{X'}^2}{\|V(w(t, u))\|_X}$$

agora integrando de 0 a δ , obtemos

$$-\int_0^\delta \frac{\|\psi'(w(t, u))\|^2}{\|V(w(t, u))\|} dt \leq -\frac{1}{2} \int_0^\delta \|\psi'(w(t, u))\| dt,$$

de (3.16) e pelo fato de $\rho \equiv 1$ em B , temos

$$\int_0^\delta \frac{d}{dt} \psi(w(t, u)) dt \leq -\int_0^\delta \frac{\|\psi'(w(t, u))\|^2}{\|V(w(t, u))\|} dt,$$

portanto

$$\int_0^\delta \frac{d}{dt} \psi(w(t, u)) dt \leq -\frac{1}{2} \int_0^\delta \|\psi'(w(t, u))\| dt,$$

e ainda

$$\psi(w(\delta, u)) = \psi(u) + \int_0^\delta \frac{d}{dt} \psi(w(t, u)) dt \leq \psi(u) - \frac{1}{2} \int_0^\delta \|\psi'(w(t, u))\| dt,$$

o que mostra (3.17). Como queríamos demonstrar. De (3.3) e de $\psi(u) \leq c + \epsilon$, e usando (3.17), vem

$$\psi(w(\delta, u)) \leq c + \epsilon - \int_0^\delta \frac{1}{2} \cdot \frac{4\epsilon}{\delta} dt = c + \epsilon - \frac{1}{2} \cdot \frac{4\epsilon}{\delta} \delta = c - \epsilon.$$

Portanto, em qualquer dos casos (a) ou (b), mostramos que

$$\eta(1, u) = w(\delta, u) \in (\psi^{c-\epsilon} \cap S_\delta) \text{ se } u \in (\psi^{c+\epsilon} \cap S).$$

Mostrando (iii). Isto encerra a demonstração do **Teorema 15 de Deformação**. □

Lema 4. A função f da demonstração do Teorema de Deformação 15, é localmente Lipschitziana.

Demonstração. Veja,

$$f(u) - f(v) = \frac{\rho(v)}{\|V(v)\|} V(v) - \frac{\rho(u)}{\|V(u)\|} V(u)$$

daí

$$f(u) - f(v) = \frac{\rho(v) \|V(u)\| V(v) - \rho(u) \|V(v)\| V(u)}{\|V(u)\| \|V(v)\|}$$

com isso, somando e subtraindo no numerador da fração acima, $\rho(u) \|V(u)\| V(v)$ e $\rho(u) \|V(v)\| V(v)$, obtemos

$$f(u) - f(v) = \frac{1}{\alpha} (\|V(u)\| V(v) (\rho(v) - \rho(u)) + \rho(u) \|V(v)\| (V(v) - V(u))) +$$

$$\rho(u)V(v)(\|V(u)\| - \|V(v)\|).$$

onde

$$\alpha = \|V(u)\| \|V(v)\|.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \|f(u) - f(v)\| &\leq |\rho(v) - \rho(u)| + \frac{\rho(u)}{\|V(u)\|} \|V(v) - V(u)\| \\ &\quad + \frac{\rho(u)}{\|V(u)\|} \|V(u) - V(v)\|. \end{aligned}$$

Sendo ρ e V localmente Lipschitzianas, existem $K_1, K_2 > 0$ e z arbitrário tal que $u, v \in U_z$ satisfazendo

$$\begin{aligned} \|f(u) - f(v)\| &\leq K_1 \|v - u\| + \frac{\rho(u)}{\|V(u)\|} K_2 \|v - u\| \\ &\quad + \frac{\rho(u)}{\|V(u)\|} K_2 \|v - u\| \end{aligned}$$

logo,

$$\|f(u) - f(v)\| \leq \left(K_1 + \frac{\rho(u)}{\|V(u)\|} K_2 \right) \|v - u\|.$$

Usando a continuidade da função ρ e V , podemos concluir que f é localmente Lipschitziana. $\square$

Seja X um espaço de Banach e $\psi : X \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional de classe C^1 .

Definição 10. Dizemos que $(u_n) \subset X$, é uma sequência **Palais-Smale-(PS)**, no nível c , denotada por $(PS)_c$ quando

$$\psi(u_n) \rightarrow c \text{ e } \psi'(u_n) \rightarrow 0.$$

Definição 11. Dizemos que ψ , verifica a condição de (PS), quando toda sequência $(PS)_c$ para $c \in \mathbb{R}$, admite uma subsequência que converge forte em X , isto é,

$$\psi(u_n) \rightarrow c \text{ e } \psi'(u_n) \rightarrow 0,$$

existem $(u_{n_k}) \subset (u_n)$ e $u_0 \in X$ tal que

$$u_{n_k} \rightarrow u_0 \text{ em } X.$$

Definição 12. (Teorema de Deformação): Suponha que $\psi \in C^1(X, \mathbb{R})$ satisfaz a condição (PS). Se $c \in \mathbb{R}$ não é um valor crítico de ψ então, para todo ϵ suficientemente pequeno, existe $\eta \in C([0, 1] \times X, X)$ tal que (para qualquer $u \in X$ e $t \in [0, 1]$) :

i) $\eta(0, u) = u,$

ii) $\eta(t, u) = u$ se $u \notin \psi^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon]),$

iii) $\eta(1, \psi^{c+\epsilon}) \subset \psi^{c-\epsilon}.$

Demonstração. Uma vez que por hipótese c não é valor crítico de ψ , existem $\alpha, \beta > 0$ tais que,

$$\text{se } u \in \psi^{-1}([c - 2\alpha, c + 2\alpha]) \Rightarrow \|\psi'(u)\| \geq \beta,$$

pois caso contrário, para quaisquer $\alpha, \beta > 0$ existirá

$$u_{\alpha\beta} \in \psi^{-1}([c - 2\alpha, c + 2\alpha]) \text{ com } \|\psi'(u_{\alpha\beta})\| < \beta.$$

Considerando

$$\alpha = \frac{1}{2n}, \beta = \frac{1}{n} \text{ e } u_n = u_{\alpha_n\beta_n},$$

temos

$$c - \frac{1}{n} \leq \psi(u_n) \leq c + \frac{1}{n} \text{ e } \|\psi'(u_n)\| < \frac{1}{n}.$$

Dáí

$$\psi(u_n) \longrightarrow c \text{ e } \psi'(u_n) \longrightarrow 0,$$

quando $n \longrightarrow \infty$.

Como ψ verifica a condição (PS), existe uma subsequência $(u_{n_k}) \subset (u_n)$ tal que

$$u_{n_k} \longrightarrow u.$$

Desde que $\psi \in C^1(X, \mathbb{R})$, temos

$$\psi(u_{n_k}) \longrightarrow \psi(u) \text{ e } \psi'(u_{n_k}) \longrightarrow \psi'(u),$$

portanto, pela unicidade do limite segue

$$\psi(u) = c \text{ e } \psi'(u) = 0.$$

Logo, c é um valor crítico de ψ , contradizendo a hipótese. Dáí, usando o Teorema 15 de Deformação, com $X = S$, $\epsilon \in (0, \alpha]$ fixado e $\delta = \frac{4\epsilon}{\beta}$, concluímos a demonstração do Teorema 12 de Deformação.

□

3.2 O Teorema do Passo da Montanha

Vamos agora apresentar uma primeira ilustração do método minimax, a qual tem provado ser uma ferramenta poderosa na abordagem de muitos problemas não-lineares em equações diferenciais, o chamado Teorema do **Passo da Montanha** de **Ambrosetti e Rabinowitz**.

Teorema 16. (Teorema do Passo da Montanha): *Seja X um espaço de Banach e seja $\psi \in C^1(X, \mathbb{R})$ um funcional satisfazendo a condição de **Palais-Smale (PS)** [ou $(PS)_c$]. Suponha que, se*

$$e \in X \text{ e } 0 < r < \|e\| \quad (3.18)$$

são tais que

$$a \equiv \max \{\psi(0), \psi(e)\} < \inf_{\|u\|=r} \psi(u) \equiv b, \quad (3.19)$$

Então

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \sup_{t \in [0,1]} \psi(\gamma(t)) \quad (3.20)$$

é um valor crítico de ψ com $c \geq b$. Onde

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0, 1], X) \text{ tal que } \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\}$$

é a classe de caminhos ligando 0 a e.

Demonstração. Seja

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} \psi(\gamma(t)) \quad (3.21)$$

Afirmamos que c está bem definido. pois, sendo $\psi \in C^1(X, \mathbb{R})$ e $\gamma \in C([0, 1], X)$, segue que $\psi \circ \gamma$ é uma aplicação contínua, e sendo $[0, 1]$ um conjunto compacto, temos que $\psi \circ \gamma$ possui em $[0, 1]$, um máximo, e por isso trocamos o supremo por máximo em (3.20) pois, como $\gamma([0, 1])$ é compacto em X , então $\psi(\gamma(t))$ também é compacto. Notemos que,

$$\gamma([0, 1]) \cap \partial B_r \neq \emptyset \quad (3.22)$$

para qualquer $\gamma \in \Gamma$, pois $\gamma(0) = 0$ e $\gamma(1) = e$ e $0 < r < \|e\|$ por hipótese. Portanto,

$$\max_{t \in [0,1]} \psi(\gamma(t)) \geq b = \inf_{\partial B_r} \psi, \text{ pois,}$$

pela definição de b , temos

$$b \leq \psi(u), \forall u \in X; \|u\| = r.$$

considerando a função

$$g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \quad (3.23)$$

definida por,

$$t \rightarrow g(t) = \|\gamma(t)\| \quad \forall t \in [0, 1] \quad (3.24)$$

seque-se que g é contínua, note que:

$$g(0) = \|\gamma(0)\| = \|0\| = 0, \quad g(1) = \|\gamma(1)\| = \|e\| > r \quad (3.25)$$

isto é, $g(0) < r < g(1)$, então pelo teorema do valor intermediário existe t_0 em $(0, 1)$ tal que,

$$g(t_0) = \|\gamma(t_0)\| = r.$$

logo existe $u_0 = \gamma(t_0) \in X$, tal que $\|u_0\| = r$, assim, $b \leq \psi(u_0)$ e

$$\psi(u_0) = \psi(\gamma(t_0)) \leq \max_{t \in [0,1]} \psi(\gamma(t))$$

implicando que

$$b \leq \max_{t \in [0,1]} \psi(\gamma(t))$$

sendo $\gamma \in \Gamma$ arbitrários, temos

$$b \leq c \leq \max_{t \in [0,1]} \psi(\gamma(t)).$$

Agora suponha que c não é um valor crítico de ψ . Então pelo **Teorema 12 de Deformação**, para,

$$0 < \epsilon < \frac{(b-a)}{2}, \quad \text{existe } \eta \in C([0, 1] \times X, X) \quad (3.26)$$

tal que,

$$\text{ii) } \eta(t, u) = u \text{ se } u \notin \psi^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon]),$$

$$\text{iii) } \eta(1, \psi^{c+\epsilon}) \subset \psi^{c-\epsilon},$$

Agora, pela definição de c , como um ínfimo sobre Γ , podemos escolher um $\gamma_0 \in \Gamma$ tal que,

$$c < \max_{t \in [0,1]} \psi(\gamma_0(t)) \leq c + \epsilon. \quad (3.27)$$

Considere o caminho $\hat{\gamma}(t) = \eta(1, \gamma(t))$. Por (ii) e pelo fato que $2\epsilon < b - a$, segue-se que $\hat{\gamma} \in \Gamma$, pois,

$$\hat{\gamma}(0) = \eta(1, 0) = 0 \text{ e } \hat{\gamma}(1) = \eta(1, e) = e \quad (3.28)$$

uma vez que

$$\psi(0), \psi(e) \leq a < b - 2\epsilon. \quad (3.29)$$

De (3.27) seque,

$$\gamma_0(t) \in \psi^{c+\epsilon} \quad (3.30)$$

De (iii) e (3.30) temos,

$$\hat{\gamma}_0(t) = \eta(1, \gamma_0(t)) \in \psi^{c-\epsilon}, \quad \forall t \in [0, 1],$$

ou seja

$$\psi(\hat{\gamma}_0(t)) \leq c - \epsilon, \quad \forall t \in [0, 1],$$

logo

$$\max_{t \in [0, 1]} \psi(\hat{\gamma}_0(t)) \leq c - \epsilon,$$

e sendo

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0, 1]} \psi(\gamma(t)),$$

temos

$$c \leq \max_{t \in [0, 1]} \psi(\hat{\gamma}_0(t)) \leq c - \epsilon$$

então

$$c \leq c - \epsilon.$$

Que é um absurdo. Portanto c é um valor crítico de ψ . Isto encerra a demonstração do Teorema 16 do Passo da Montanha . □

Capítulo 4

Uma aplicação do Teorema do Passo da Montanha

4.1 Existência de solução fraca para o problema de Dirichlet não linear com a condição de Ambrosetti-Rabinowitz.

Neste capítulo estudaremos a existência de solução fraca para o seguinte problema:

$$-\Delta u = f(x, u) \text{ em } \Omega, \quad u = 0 \text{ na } \partial\Omega \quad (4.1)$$

Onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, ($N \geq 2$) é um domínio limitado com fronteira suave e, $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de carathéodory, satisfazendo as seguintes condições:

- (H1) $\exists c, d \geq 0$ e $0 \leq \sigma < \frac{(N+2)}{(N-2)}$ se $N \geq 3$ [$0 \leq \sigma < \infty$ se $N = 1, 2$]

tais que

$$|f(x, t)| \leq c |t|^\sigma + d,$$

- (H2) $f(x, t) = o(|t|)$ quando $t \rightarrow 0$, uniformemente em x ,
- (H3) Existem $\mu > 2$ e $r > 0$ tais que

$$0 < \mu F(x, t) \leq t f(x, t) \quad \forall |t| \geq r, \text{ onde.}$$

$$F(x, t) = \int_0^t f(x, z) dz.$$

Note que o funcional ψ , associado ao problema (4.1), também é o funcional associado ao problema (2.6).

1º Caso: $N > 2$.

Lema 5. a) $u=0$ é um ponto de mínimo local estrito para ψ :

b) Dado $0 \neq v \in H_0^1(\Omega)$ (digamos $\|v\| = 1$), existe $\rho_0 > 0$; $\psi(\rho_0 v) \leq 0$:

Demonstração. (a), pela hipótese (H_2) , dado $\epsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que

$$|t| \leq \delta \Rightarrow |f(x, t)| \leq \epsilon |t|,$$

portanto

$$|F(x, t)| \leq \frac{\epsilon}{2} |t|^2 \text{ se } |t| \leq \delta \quad (4.2)$$

uma vez que a condição de crescimento (H_1) implica que,

$$|F(x, t)| \leq A_\epsilon |t|^{\sigma+1} \text{ se } |t| \geq \delta \quad (4.3)$$

podemos combinar as duas equações acima, obtendo

$$|F(x, t)| \leq \frac{\epsilon}{2} |t|^2 + A_\epsilon |t|^{\sigma+1} \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \Omega. \quad (4.4)$$

daí, obtemos,

$$\psi(u) = \frac{\|u\|^2}{2} - \int_{\Omega} F(x, u) dx \geq \frac{\|u\|^2}{2} - \frac{\epsilon}{2} \|u\|_{L^2}^2 - A_\epsilon \|u\|_{L^{\sigma+1}}^{\sigma+1}, \quad (4.5)$$

logo pelas imersões contínuas de Sobolev, temos,

$$\psi(u) \geq \frac{\|u\|^2}{2} - K_\epsilon \|u\|^2 - M \|u\|^{\sigma+1}, \quad (4.6)$$

ou seja,

$$\psi(u) \geq \|u\|^2 \left(\frac{1 - 2K_\epsilon}{2} - M \|u\|^{\sigma-1} \right) \quad \forall u \in H_0^1(\Omega)$$

para ϵ suficientemente pequeno e fixado temos,

$$0 < r < \left(\frac{1 - 2K_\epsilon}{2M} \right)^{\frac{1}{\sigma-1}}$$

e escolhendo

$$\alpha = r^2 \left[\frac{1 - 2K_\epsilon}{2} - M r^{\sigma-1} \right]$$

temos,

$$\psi(u) \geq \alpha > 0, \quad \psi(0) = 0, \quad \text{para } \|u\| = r.$$

(b) Notemos que a condição (H_3) conhecida como a condição de Ambrosetti e Rabinowitz, implica na existência de constantes $c_1, c_2 > 0$ tais que,

$$|F(x, t)| \geq c_1 |t|^\mu - c_2 \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (4.7)$$

Observação: Como $\mu > 2$, então F é uma função superquadrática em t , pela desigualdade acima.

Vamos dividir a prova da existência das constantes em dois casos:

1º caso: $t > 0$. Pela condição (H_3) , temos

$$0 < \frac{\mu}{t} \leq \frac{f(x, t)}{F(x, t)}, \quad t \geq r, \quad x \in \overline{\Omega},$$

implicando

$$\int_r^t \frac{\mu}{z} dz \leq \int_r^t \frac{f(x, z)}{F(x, z)} dz,$$

daí

$$\mu \ln |z| \Big|_r^t \leq \ln |F(x, z)| \Big|_r^t, \quad t \geq r, \quad x \in \overline{\Omega},$$

ou ainda

$$\mu \ln(t) - \mu \ln(r) \leq \ln(F(x, t)) - \ln(F(x, r)), \quad t \geq r, \quad x \in \overline{\Omega}.$$

Com isso

$$\ln \left(\frac{t}{r} \right)^\mu \leq \ln \frac{F(x, t)}{F(x, r)}, \quad t \geq r, \quad x \in \overline{\Omega}.$$

Implicando

$$F(x, t) \geq \frac{F(x, r)}{r^\mu} t^\mu, \quad t \geq r, \quad x \in \overline{\Omega}.$$

Pela condição de crescimento (H_1) , podemos considerar

$$K_1 = \min_{x \in \overline{\Omega}} F(x, r).$$

Com isso, podemos escrever,

$$F(x, t) \geq \frac{K_1}{r^\mu} t^\mu, \quad t \geq r, \quad x \in \overline{\Omega}.$$

Portanto,

$$F(x, t) \geq C_1 t^\mu, \quad t \geq r, \quad x \in \overline{\Omega}. \quad (4.8)$$

Onde $C_1 = \frac{K_1}{r^\mu}$ e $C_1 > 0$.

2º Caso: $t < 0$. pela condição (H_3) , segue

$$\frac{f(x, t)}{F(x, t)} \leq \frac{\mu}{t}, \quad t \leq -r, \quad x \in \overline{\Omega}.$$

o que implica

$$\int_t^{-r} \frac{f(x, z)}{F(x, z)} dz \leq \int_t^{-r} \frac{\mu}{z} dz, \quad t \leq -r, \quad x \in \overline{\Omega},$$

daí, com os mesmos argumentos anteriores, chegaremos

$$\ln(F(x, -r)) - \ln(F(x, t)) \leq \mu \ln |-r| - \mu \ln |t|, \quad t \leq -r, \quad x \in \overline{\Omega},$$

com isso, temos

$$\ln \left(\frac{F(x, -r)}{F(x, t)} \right) \leq \ln \left(\left| \frac{r}{t} \right|^\mu \right), \quad t \leq -r, \quad x \in \overline{\Omega},$$

e ainda,

$$\frac{F(x, -r)}{F(x, t)} \leq \left| \frac{r}{t} \right|^\mu, \quad t \leq -r, \quad x \in \overline{\Omega},$$

assim,

$$\frac{1}{F(x, t)} \leq \left| \frac{r}{t} \right|^\mu \cdot \frac{1}{F(x, -r)}, \quad t \leq -r, \quad x \in \overline{\Omega},$$

equivalentemente,

$$F(x, t) \geq \left| \frac{r}{t} \right|^{-\mu} \cdot F(x, -r), \quad t \leq -r, \quad x \in \overline{\Omega},$$

Considerando

$$K_2 = \min_{x \in \overline{\Omega}} F(x, -r).$$

Temos

$$F(x, t) \geq \left| \frac{t}{r} \right|^\mu \cdot K_2, \quad t \leq -r, \quad x \in \overline{\Omega}.$$

Então

$$F(x, t) \geq C_2 \cdot |t|^\mu, \quad t \leq -r, \quad x \in \overline{\Omega}. \quad (4.9)$$

Com $C_2 = \frac{K_2}{|r|^\mu}$ e $C_2 > 0$. Seja $c_1 = \min \{C_1, C_2\}$. Logo, por (4.8) e (4.9), vem

$$F(x, t) \geq c_1 |t|^\mu, \quad \forall |t| \geq r, \quad x \in \overline{\Omega}.$$

Considerando

$$M = \min \{F(x, t) \mid x \in \overline{\Omega}, t \in [-r, r]\}.$$

Temos

$$F(x, t) \geq M, \quad \text{para } (x, t) \in \overline{\Omega} \times [-r, r].$$

Consideremos agora $c_2 > 0$, de modo que

$$c_2 \geq c_1 r^\mu - M \Rightarrow c_2 \geq c_1 |t|^\mu - M, \quad \forall t \in [-r, r],$$

ou seja,

$$M \geq c_1 |t|^\mu - c_2, \quad \forall t \in [-r, r].$$

Portanto

$$F(x, t) \geq c_1 |t|^\mu - c_2, \quad \forall t \in [-r, r], \quad x \in \overline{\Omega}. \quad (4.10)$$

e

$$F(x, t) \geq c_1 |t|^\mu - c_2, \quad \forall \quad |t| \geq r, \quad x \in \overline{\Omega}. \quad (4.11)$$

De 4.10 e 4.11 segue (4.7). Com isso, temos

$$\psi(u) = \frac{\|u\|^2}{2} - \int_{\Omega} F(x, u) dx \leq \frac{\|u\|^2}{2} - c_1 \|u\|_{L^\mu}^\mu + c_2 |\Omega| \quad (4.12)$$

de sorte que dado $v \in H_0^1(\Omega)$ com $\|v\| = 1$, e escolhendo $\delta = c_1 \|v\|_{L^\mu}^\mu > 0$, obtemos,

$$\psi(\rho \cdot v) \leq \frac{1}{2} \rho^2 - \delta \rho^\mu + c_2 |\Omega| \longrightarrow -\infty \quad \text{quando} \quad \rho \longrightarrow \infty.$$

em particular, existe $\rho_0 > 0$ tal que $\psi(\rho_0 v) \leq 0$. □

Lema 6. *Se $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é a função de Carathéodory do problema (??), satisfazendo as condições $(H_1) - (H_3)$, então o mesmo possui uma solução fraca não-trivial $u \in H_0^1(\Omega)$.*

Demonstração. Vamos agora começar mostrando que o funcional ψ satisfaz a condição $(P.S)$. Seja u_n uma sequência de $(PS)_c$, isto é,

$$\psi(u_n) \longrightarrow c, \quad \psi'(u_n) \longrightarrow 0.$$

Vamos mostrar que u_n possui uma subsequência que converge forte em $H_0^1(\Omega)$. Primeiramente, mostraremos que u_n é limitada em $H_0^1(\Omega)$. Veja,

$$\psi(u_n) = \frac{\|u_n\|^2}{2} - \int_{\Omega} F(x, u_n) dx,$$

então

$$\psi'(u_n)u_n = \|u_n\|^2 - \int_{\Omega} f(x, u_n)u_n dx.$$

Além disso, note que $\psi'(u_n) \rightarrow 0$ implica que, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|\psi'(u_n)\| < \epsilon, \quad \forall \quad n \geq n_0,$$

ou seja,

$$|\psi'(u_n)u_n| \leq \epsilon \|u_n\| \quad \forall \quad n \geq n_0. \quad (4.13)$$

Note ainda que,

$$\psi(u_n) - \frac{1}{\mu} \psi'(u_n) \cdot u_n = \frac{1}{2} \|u_n\|^2 - \int_{\Omega} F(x, u_n) dx - \left(\frac{1}{\mu} \|u_n\|^2 - \frac{1}{\mu} \int_{\Omega} f(x, u_n)u_n dx \right).$$

segue

$$\psi(u_n) - \frac{1}{\mu} \psi'(u_n) \cdot u_n = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu} \right) \|u_n\|^2 + \int_{\Omega} \left(\frac{1}{\mu} f(x, u_n)u_n - F(x, u_n) \right) dx.$$

Considerando o conjunto $V_n = \{x \in \Omega; |u_n| \geq r\}$, temos

$$\begin{aligned} \psi(u_n) - \frac{1}{\mu} \psi'(u_n).u_n &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu} \right) \|u_n\|^2 + \\ &\int_{V_n} \left(\frac{1}{\mu} f(x, u_n)u_n - F(x, u_n) \right) dx + \int_{V_n^c} \left(\frac{1}{\mu} f(x, u_n)u_n - F(x, u_n) \right) dx. \end{aligned}$$

Da condição de Ambrosetti-Rabinowitz (H_3), obtemos

$$\frac{1}{\mu} f(x, u_n)u_n - F(x, u_n) \geq 0, \quad \forall x \in V_n,$$

implicando

$$\int_{V_n} \left(\frac{1}{\mu} f(x, u_n)u_n - F(x, u_n) \right) dx \geq 0,$$

daí

$$\psi(u_n) - \frac{1}{\mu} \psi'(u_n).u_n \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu} \right) \|u_n\|^2 + \int_{V_n^c} \left(\frac{1}{\mu} f(x, u_n)u_n - F(x, u_n) \right) dx,$$

consequentemente temos

$$\psi(u_n) - \frac{1}{\mu} \psi'(u_n).u_n \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu} \right) \|u_n\|^2 - \int_{V_n^c} \left| \frac{1}{\mu} f(x, u_n)u_n - F(x, u_n) \right| dx.$$

Novamente, pela condição de crescimento (H_1), temos que

$$g(x, u_n) = \left| \frac{1}{\mu} f(x, u_n)u_n - F(x, u_n) \right|$$

é limitada em $\overline{\Omega} \times [-r, r]$, logo existe $C > 0$ tal que

$$|g(x, u_n)| \leq C, \quad \forall (x, u_n) \in \overline{\Omega} \times [-r, r]$$

então

$$\left| \frac{1}{\mu} f(x, u_n)u_n - F(x, u_n) \right| \leq C, \quad \forall (x, u_n) \in \overline{V_n^c}.$$

Com isso, temos

$$\psi(u_n) - \frac{1}{\mu} \psi'(u_n).u_n \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu} \right) \|u_n\|^2 - \int_{\overline{V_n^c}} C dx,$$

e a partir daí

$$\psi(u_n) - \frac{1}{\mu} \psi'(u_n).u_n \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu} \right) \|u_n\|^2 - C |\overline{V_n^c}|,$$

além disso, temos

$$\psi(u_n) - \frac{1}{\mu} \psi'(u_n).u_n \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu} \right) \|u_n\|^2 - C |\Omega|,$$

ou seja

$$\psi(u_n) - \frac{1}{\mu} \psi'(u_n).u_n \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu} \right) \|u_n\|^2 - C_2. \quad (4.14)$$

Por outro lado temos

$$\psi(u_n) - \frac{1}{\mu} \psi'(u_n).u_n \leq \left| \psi(u_n) - \frac{1}{\mu} \psi'(u_n).u_n \right|,$$

então

$$\psi(u_n) - \frac{1}{\mu} \psi'(u_n).u_n \leq |\psi(u_n)| + \frac{1}{\mu} |\psi'(u_n).u_n|.$$

Como $|\psi(u_n)| \leq C$ e (4.13), segue

$$\psi(u_n) - \frac{1}{\mu} \psi'(u_n).u_n \leq C + \frac{1}{\mu} \epsilon \|u_n\|, \quad (4.15)$$

para n suficientemente grande. De (4.14) e (4.15), tem-se

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu} \right) \|u_n\|^2 - c_2 \leq c + \frac{1}{\mu} \epsilon \|u_n\|$$

daí

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu} \right) \|u_n\|^2 \leq \hat{K} + \frac{1}{\mu} \epsilon \|u_n\|$$

com $\hat{K} = c + c_2 > 0$ o que implica que $\|u_n\|$ é limitada.

Vamos agora provar que (u_n) possui uma subsequência que converge forte em $H_0^1(\Omega)$. Veja, sabemos que o funcional dado pelo lema 3 é de classe $C^1(H_0^1(\Omega), R)$, e ainda que,

$$\psi'(u).v = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx - \int_{\Omega} f(x, u) v dx, \quad (4.16)$$

em que, $\psi'(u) \in (H_0^1(\Omega))'$. como $H_0^1(\Omega)$ é um espaço de Hilbert, então pelo Teorema da Representação de Riesz, (Ver Teorema 11), temos

$$\psi'(u).v = \langle \nabla \psi(u), v \rangle, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \text{com} \quad \|\psi'(u)\|_{(H_0^1(\Omega))'} = \|\nabla \psi(u)\|_{H_0^1(\Omega)}, \quad (4.17)$$

consideremos agora

$$J'(u).v = \int_{\Omega} f(x, u) v dx \quad (4.18)$$

daí,

$$\psi'(u).v = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx - J'(u).v, \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega) \quad (4.19)$$

usando novamente o Teorema da Representação de Riesz (Ver Teorema 11), para (4.18), segue,

$$J'(u).v = \langle \nabla J(u), v \rangle, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad \text{com} \quad \|J'(u)\|_{(H_0^1(\Omega))'} = \|\nabla J(u)\|_{H_0^1(\Omega)}, \quad (4.20)$$

logo substituindo (4.17) e (4.20) em (4.19) temos,

$$\langle \nabla \psi(u), v \rangle = \langle u, v \rangle - \langle \nabla J(u), v \rangle,$$

então,

$$\langle \nabla \psi(u), v \rangle = \langle u - \nabla J(u), v \rangle \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

daí,

$$\nabla \psi(u) = u - \nabla J(u). \quad (4.21)$$

Agora mostraremos que

$$T : H_0^1(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega) \text{ com } T(u) = \nabla J(u), \quad (4.22)$$

é um operador compacto.

Lembremos atreves das propriedades de operadores compactos, que uma das formas para mostrarmos a compacidade de T , é, mostrarmos que para toda sequência limitada, $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$, teremos que a sequência $T(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ possui uma subsequência convergente. (Ver Teorema 13). Sendo $H_0^1(\Omega)$ um espaço reflexivo então existe uma subsequencia que continuaremos denotando por u_n tal que converge fracamente em $H_0^1(\Omega)$, ou seja,

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } H_0^1(\Omega).$$

Da imersão compacta de Sobolev $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$, $\forall r \in [1, 2^*)$ (Ver Teorema 12, item i), implica

$$i : H_0^1(\Omega) \longrightarrow L^r(\Omega)$$

é um operador linear compacto, pela própria definição de imersão compacta. Daí i leva sequências convergindo fracamente $u_n \rightharpoonup u$ em $H_0^1(\Omega)$, em sequências convergindo fortemente em $L^r(\Omega)$, isto é,

$$u_n \longrightarrow u \text{ em } L^r(\Omega).$$

ou seja, converge na topologia forte de $L^r(\Omega)$, e portanto, converge na norma,

$$\|u_n - u\|_{L^r(\Omega)} \longrightarrow 0 \quad (4.23)$$

Agora, fixando r , com $\sigma + 1 \leq r < 2^*$ e considerando q o conjugado de r , isto é, $q = \frac{r}{r-1}$. Vamos mostrar que

$$f(\cdot, u_n(\cdot)) \longrightarrow f(\cdot, u(\cdot)) \text{ em } L^q(\Omega).$$

Note, segue de (4.23) e pelo (ver Teorema 7), que existe uma subsequência de (u_n) , que ainda denotaremos por (u_n) tal que,

$$u_n(x) \longrightarrow u(x) \text{ q.t.p } x \in \Omega,$$

e

$$|u_n(x)| \leq G(x) \text{ q.t.p } x \in \Omega, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad G \in L^r(\Omega). \quad (4.24)$$

Como f é uma função de Carathéodory, juntamente com o (lema 1), temos

$$f(x, u_n(x)) \longrightarrow f(x, u(x)) \text{ q.t.p } x \in \Omega,$$

daí

$$|f(x, u_n(x)) - f(x, u(x))|^{\frac{r}{\sigma}} \longrightarrow 0 \text{ q.t.p } x \in \Omega.$$

Agora, usando a condição de crescimento (H_1) , a limitação uniforme em (4.24) e o fato de Ω ser limitado, resulta na existência de uma função $\varphi \in L^1(\Omega)$ tal que

$$|f(x, u_n(x)) - f(x, u(x))|^{\frac{r}{\sigma}} \leq \varphi,$$

donde segue usando o Teorema da convergência Dominada de Lebesgue (Ver Teorema 8), que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_{\Omega} |f(x, u_n(x)) - f(x, u(x))|^{\frac{r}{\sigma}} dx \right) = 0,$$

ou seja,

$$f(\cdot, u_n(\cdot)) \longrightarrow f(\cdot, u(\cdot)) \text{ em } L^{\frac{r}{\sigma}}(\Omega).$$

Como $1 < q < \frac{r}{\sigma}$ e Ω é limitado (Ver Teorema 9), vale a imersão contínua

$$L^{\frac{r}{\sigma}}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega).$$

Portanto,

$$\|f(\cdot, u_n(\cdot)) - f(\cdot, u(\cdot))\|_{L^q(\Omega)} \longrightarrow 0 \text{ quando } n \longrightarrow +\infty. \quad (4.25)$$

Observe que

$$\|T(u_n) - T(u)\| = \|J'(u_n) - J'(u)\|_{(H_0^1(\Omega))'} = \sup_{\|v\| \leq 1} |(J'(u_n) - J'(u)) \cdot v|.$$

Porem,

$$|(J'(u_n) - J'(u)) \cdot v| = \left| \int_{\Omega} (f(x, u_n) - f(x, u)) \cdot v dx \right|,$$

implicando que

$$|(J'(u_n) - J'(u)) \cdot v| \leq \int_{\Omega} |f(x, u_n) - f(x, u)| |v| dx,$$

usando Hölder (ver Teorema 6), obtemos

$$|(J'(u_n) - J'(u)) \cdot v| \leq \|f(\cdot, u_n(\cdot)) - f(\cdot, u(\cdot))\|_{L^q(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}.$$

Usando a imersão contínua $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$, com $r \in [\sigma + 1, 2^*]$ (Ver Teorema 2, item i), segue que existe um $M > 0$ tal que

$$|(J'(u_n) - J'(u)) \cdot v| \leq M \|f(\cdot, u_n(\cdot)) - f(\cdot, u(\cdot))\|_{L^q(\Omega)} \|v\|,$$

de onde obtemos

$$|(J'(u_n) - J'(u)) \cdot v| \leq M \|f(\cdot, u_n(\cdot)) - f(\cdot, u(\cdot))\|_{L^q(\Omega)},$$

pois $\|v\| \leq 1$. Assim,

$$\|J'(u_n) - J'(u)\|_{(H_0^1(\Omega))'} \leq M \|f(\cdot, u_n(\cdot)) - f(\cdot, u(\cdot))\|_{L^q(\Omega)},$$

isto é,

$$\|T(u_n) - T(u)\| \leq M \|f(\cdot, u_n(\cdot)) - f(\cdot, u(\cdot))\|_{L^q(\Omega)}. \quad (4.26)$$

Portanto, de (4.25) e (4.26), concluímos que, existe uma subsequência, que ainda denotaremos por $T(u_n)$, tal que

$$\|T(u_n) - T(u)\| \longrightarrow 0.$$

Mostrando assim que T é compacto. Por outro lado

$$\psi'(u_n) \longrightarrow 0 \Leftrightarrow \|\psi'(u_n)\|_{(H_0^1(\Omega))'} \longrightarrow 0, \quad (4.27)$$

logo, por (4.17) e (4.27), temos

$$\|\nabla\psi(u_n)\| \longrightarrow 0 \Leftrightarrow \nabla\psi(u_n) \longrightarrow 0. \quad (4.28)$$

Sendo

$$\nabla\psi(u_n) = u_n - T(u_n) \Rightarrow u_n = \nabla\psi(u_n) + T(u_n). \quad (4.29)$$

Como o operador T é compacto, vem

$$\|T(u_n) - T(u)\| \longrightarrow 0. \quad (4.30)$$

Passando o limite em (4.29) e usando as convergências (4.28) e (4.30), obtemos uma subsequência tal que

$$u_n \longrightarrow T(u) \text{ em } H_0^1(\Omega),$$

mostrando assim a **condição (PS)**. Mostramos a **condição (PS)** para $N > 2$. já o 2º caso, em que $N = 2$, fica como exercício. Dica: basta substituírmos a imersão contínua

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad 1 \leq q \leq 2^*,$$

(Ver Teorema 2, item i), pela imersão contínua

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad 1 \leq q < +\infty,$$

(Ver Teorema 2, item ii). E a imersão compacta

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad 1 \leq q < 2^*,$$

(Ver Teorema 12 item i) pela imersão compacta

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad 1 \leq q < +\infty,$$

(Ver Teorema 12 item ii). Em suma, aplicando o **Teorema do Passo da Montanha** 16, concluímos a existência de um ponto crítico de ψ , e com o lema 3 verifica-se que esse ponto crítico é uma solução fraca do problema (4.1).

Capítulo 5

Teorema do Passo da Montanha Generalizado

5.1 Alguns resultados do Grau topológico

Apresentaremos aqui apenas alguns resultados do grau topológico para usarmos na demonstração do teorema seguinte, o leitor interessado em mais resultados deverá ver em [2]

Normalização. Se $id : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}^N$ é a aplicação identidade, então

$$deg(id, U, b) = 1 \text{ se } b \in U \text{ e } deg(id, U, b) = 0 \text{ se } b \notin U \quad (5.1)$$

Proposição 1. (Dependência na fronteira.) Sejam $\psi, \phi \in C(\bar{U}, \mathbb{R}^N)$. Se $\psi \equiv \phi$ em ∂U , então $deg(\phi, U, b) = deg(\psi, U, b)$

Proposição 2. (Existência de Solução): Se $deg(\phi, \Omega, b) \neq 0$ então, existe $x_0 \in \Omega$ tal que

$$\phi(x_0) = b$$

5.2 Teorema do Passo da Montanha Generalizado

Teorema 17. Teorema do Passo da Montanha Generalizado: Seja $E = V \oplus X$ um espaço de Banach real, onde $\dim V < +\infty$. Considere $\psi \in C^1(E, \mathbb{R})$ um funcional satisfazendo a condição de Palais-Smale-(PS) e as seguintes condições :

- ψ_1 : Existem constantes $\alpha, \rho > 0$ tais que

$$\psi|_{\partial B_\rho \cap X} \geq \alpha, \text{ e}$$

- ψ_2 : Existe $e \in (\partial B_1 \cap X)$ e $R > \rho$ tais que, se $Q \equiv \{B_R \cap V\} \oplus \{re; 0 < r < R\}$, então

$$\psi|_{\partial Q} \leq 0.$$

Então, ψ possui um valor crítico $c \geq \alpha$, com

$$c = \inf_{h \in \Gamma} \max_{u \in \overline{Q}} \psi(h(u)),$$

onde $\Gamma = \{h \in C(\overline{Q}, E); h = id \text{ em } \partial Q\}$.

Demonstração. Provaremos apenas que c está bem definido, pois é onde se usa a teoria do grau, o restante é análoga do passo da montanha normal. Note $\psi \circ h$ possui máximo em $\overline{Q}$. **Afirmção 1:** Se $h \in \Gamma$, então

$$h(Q) \cap \partial B_\rho \cap X \neq \emptyset, \quad (5.2)$$

pois, se P denota a projeção de E sobre V , então (1) é equivalente a

$$Ph(u) = 0, \quad \|(id - P)h(u)\| = \rho \quad (5.3)$$

para algum $u \in Q$. Se $u \in \overline{Q}$, então $u = v + re$, onde $v \in \overline{B_R} \cap V$ e $0 \leq r \leq R$. defina

$$\phi(r, v) = (\|(id - P)h(v + re)\|, Ph(v + re)).$$

Notando que $\phi \in C(\mathbb{R} \times V, \mathbb{R} \times V)$, e sendo $h = id$ para $u \in \partial Q$, tem-se

$$\phi(r, v) = (\|(id - P)(v + re)\|, P(v + re)).$$

Organizado, temos

$$\phi(r, v) = (|r| \|e\|, v),$$

e como $e \in \partial B_1 \cap X$, obtemos

$$\phi(r, v) = (r, v), \quad \forall u \in \partial Q,$$

isto é, $\phi = id$ em ∂Q . Em particular, de (ψ_2) temos $\phi(r, v) \neq (\rho, 0)$ para $u \in \partial Q$ e $(\rho, 0) \in Q$. Veja, sendo $0 < \rho < R$, temos que $(\rho, 0) \notin \partial Q$, pois se estivesse, deveríamos ter

$$\rho = 0 \text{ ou } \rho = R,$$

o que não acontece. Por outro lado, sendo $0 \in \overline{B_R} \cap V$ e $0 < \rho < R$, daí $(\rho, 0) \in Q$. Identificando $\mathbb{R} \times V$ com $\mathbb{R}^N$, tem-se que o grau de Brouwer está bem definido, e pelas propriedades do grau topológico obtemos

$$\deg(\phi, Q, (\rho, 0)) = \deg(id, Q, (\rho, 0)) = 1.$$

logo existe $u \in Q$ tal que $\phi(u) = (\rho, 0)$, ou seja

$$(\|(id - P)h(u)\|, Ph(u)) = (\rho, 0),$$

o que implica

$$Ph(u) = 0, \quad \|(id - P)h(u)\| = \rho \quad (5.4)$$

mostrando assim a afirmação 1. Pela afirmação 1, temos que existe $u \in Q$ tal que $h(u) \in \partial B_\rho \cap X$. Da condição (ψ_1) , segue que $\psi(h(u)) \geq \alpha$, o que implica

$$H = \left\{ \max_{u \in \bar{Q}} \{\psi(h(u))\} \geq \alpha \quad \forall h \in \Gamma. \right\}$$

ou seja o conjunto H é limitado inferiormente, logo existe um ínfimo de H em $\mathbb{R}$, isto é, c está bem definido. O restante da demonstração é análoga a do Teorema (16) do passo da montanha, usando o teorema de Deformação. $\square$

5.3 Exercícios Propostos

Vamos agora apresentar alguns exercícios para o leitor interessado, onde são as seguintes aplicações dos teoremas 16 e 17.

Exercício 1: Problema superlinear subcrítico em domínio limitado:

Considere o seguinte problema

$$-\Delta u = f(u) \quad \text{em } \Omega, \quad u(x) = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega. \quad (5.5)$$

onde Ω é um domínio limitado do $\mathbb{R}^N$, onde temos as seguintes hipóteses sobre a função f :

- (f_1) Seja f um função contínua com

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t} = 0$$

- (f_2) considere

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{|t|^{q-1}} < +\infty$$

onde $2 < q < 2^*$ se $N > 2$ ou $2 < q$ se $N = 1$ ou $N = 2$.

- (f_3) f satisfaz a condição de Ambrosetti-Rabinowitz.

Dica: Note que de (f_1) e (f_2) temos

$$|f(t)| \leq \epsilon |t| + C |t|^{q-1}$$

para todo $\delta \leq |t| \leq R$ e para algum $C > 0$, e o funcional associado ao problema é definido por

$$\psi(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 - \int_{\Omega} F(u)$$

com $u \in H_0^1(\Omega)$. Usar o teorema 16.

Exercício 2: Aplicação do Teorema 17

Considere o seguinte problema:

$$-\Delta u = \lambda u + f(x, u) \quad \text{em } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega \quad (5.6)$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira suave e $\lambda \geq \lambda_1$, onde λ_1 é o primeiro autovalor associado ao problema

$$-\Delta v = \lambda v \quad \text{em } \Omega \quad v = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega. \quad (5.7)$$

Com $N \geq 3$ considere as seguintes hipóteses sobre f :

- G_1 $f(x,t) \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$;
- G_2 Existem constantes $a_1, a_2 > 0$ tais que

$$|f(x, t)| \leq a_1 + a_2|t|^s, \forall x \in \overline{\Omega} \text{ e } t \in \mathbb{R}, \text{ onde } 1 < s < \frac{N+2}{N-2} = 2^* - 1;$$

- G_3 f satisfaz condição de Ambrosetti-Rabinowitz;
- G_4 $f(x, t) = o(|t|)$ quando $t \rightarrow 0$;
- G_5 $tf(x, t) \geq 0$, para $t \in \mathbb{R}$.

Dica: Ver resolução em [2].

Exercício 3: (Desafio para o leitor.) O leitor interessado pode verificar a veracidade ou não da seguinte afirmação como exercício. É possível encontrar pelo menos uma solução fraca para o problema do exercício 2, retirando a condição G_1 e supondo f apenas como uma função de Carathéodory?

Referências Bibliográficas

- [1] COSTA, David Goldstein, Tópicos em Análise não-linear e Aplicações às Equações Diferenciais. CNPq-IMPA, 1986.
- [2] Poul.H.Rabinowitz, Minimax Methods in Critical Point Theory With Applications to Differential Equations, University of Miami, 1984.
- [3] M. Willem.; Minimax Theorems, Boston: Birkhauser, 1996.
- [4] Haim.Brezis, Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations, University Rutgers, 2010.
- [5] Lima, Elon Lages.; Espaços Métricos, Projeto Euclides: CNPQ-IMPA, 1977.

Análise não linear via teoria dos Pontos Críticos

Neste livro é feito de forma didática e teórica alguns teoremas da análise não linear, no qual são utilizados para a resolução de muitas equações diferenciais elípticas não lineares.

José Pastana de Oliveira Neto

RFB Editora
Home Page: www.rfbeditora.com
Email: adm@rfbeditora.com
CNPJ: 39.242.488/0001-07
Av. Governador José Malcher, nº 153, Sala 12,
Nazaré, Belém-PA, CEP 66035065

